UNIVERZITA P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

DIŠTANČNÉ FARBENIA GRAFOV

(DIPLOMOVÁ PRÁCA)

KOŠICE 2003 **PETER JACKO**

UNIVERZITA P. J. ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

Peter Jacko

Dištančné farbenia grafov

(Diplomová práca)

VEDÚCI: prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc.

KOŠICE 2003

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som pri tom uvedenú literatúru.

Bc. Peter Jacko

Rád by som vyslovil svoje poďakovanie predovšetkým vedúcemu tejto diplomovej práce prof. RNDr. Stanislavovi Jendroľovi, DrSc. za motiváciu, tvorivý prístup a vedenie k vytvoreniu tejto práce. Tiež by som chcel poďakovať RNDr. Tomášovi Madarasovi, PhD. za jeho podnetné pripomienky a myšlienky.

Obsah

Úvod

Ofarbovacie problémy sú základnými úlohami v teórii grafov. Špeciálne v posledných rokoch vznikli viaceré nové spôsoby ofarbovania, najmä ofarbovania vrcholov, ktoré rôznymi smermi upravujú základnú podmienku vrcholového ofarbovania, ktorá znie, že susedné vrcholy musia byť ofarbené rôznymi farbami. V tejto diplomovej práci sú rozoberané dve takéto ofarbovania: d-dištančné ofarbovanie a $L(K)$-ofarbovanie.

Obe ofarbovania boli inšpirované praktickými problémami z rádiovej a telekomunikačnej oblasti. Ak totiž chceme pokryť určité územie rádiovým alebo telefónnym signálom pomocou niekoľkých základňových staníc (vysielačov), vzniká interferencia (vzájomné rušenie signálu). Aby sme tejto interferencii predišli, môžeme priradiť rovnaké (resp. *blízke*) vysielacie frekvencie len takým základňovým staniciam, ktoré sú od seba dostatočne vzdialené. Intenzita signálu je totiž nepriamo úmerná vzdialenosti od vysielača. Týmto problémom sa prvý krát začalo zaoberať na prelome sedemdesiatych a osemdesiatych rokov 20. storočia, kedy vyšlo niekoľko článkov na túto tému (napr. [3], [13], [2], [8]).

Úlohu, minimálne koľko vysielacích frekvencií za uvedených podmienok potrebujeme, riešime pomocou d-dištančného ofarbovania. Ak budeme navyše vyžadovať, aby frekvencie *veľmi blízkych* vysielačov boli *dostatočne odlišné* a frekvencie *blízkych* vysielačov boli *odlišné*, ide o $L(2,1)$-ofarbovanie (pozri [1], [7], [12]), ktoré je špeciálnym prípadom $L(K)$-ofarbovania. Opäť, zaujíma nás, najmenej koľko vysielacích frekvencií potrebujeme za týchto podmienok.

So vznikom mobilných telefónnych sietí (najmä GSM) sa vynoril problém, ako efektívne rozmiestniť základňové stanice na danom území tak, aby spoločne pokrývali celé územie a čo najmenej sa prekrývali. V ideálnom prípade pokrýva jeden vysielač kruhové územie (v skutočnosti môže byť tento útvar rôzne zdeformovaný reliéfom územia) a dá sa ukázať, že najlepšie je aproximovať tieto kruhy šesťuholníkmi, ktorými sa dá *vydláždiť* rovina. Táto problematika sa nazýva bunkový koncept a bola predostretá začiatkom osemdesiatych rokov minulého storočia ([10], [4]). Problém priradenia frekvencií je teda v tomto prípade ekvivalentný ofarbovaniu stien šesťuholníkovej siete.

V tejto diplomovej práci sa zaoberám podobným problémom, ktorý môže mať zmysel pri mierne odlišných predpokladoch — ofarbovaním vrcholov šesťuholníkovej siete. Až na niekoľko tvrdení (v 7. kapitole), pri ktorých je to explicitne uvedené, sú tu predostreté pôvodné vety a myšlienky.

Časť prvá:

Nekonečná šesťuholníková sieť

1. Označenia a základné vlastnosti

V tomto texte budeme množinu prirodzených čísel označovať $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Tiež označíme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Množinu celých čísel budeme označovať $\mathbb{Z}$ a množinu reálnych čísel označíme $\mathbb{R}$.

Nech V je ľubovoľná množina a E nech je ľubovoľná podmnožina (neusporiadaných) dvojíc prvkov z množiny V. Usporiadanú dvojicu $G = (V, E)$ budeme volať *grafom*. Prvky množiny V budeme nazývať *vrcholmi grafu*, prvky množiny E budeme nazývať *hranami grafu*. Graf nazveme *triviálny*, ak jeho vrcholová množina obsahuje najviac jeden vrchol.

Vrchol $u \in V$ je *susedom* vrchola $v \in V$, ak existuje hrana $e \in E$ taká, že $e = uv$. Počet susedov vrchola $v \in V$ nazveme *stupňom* vrchola a označíme $\deg_G(v)$. Vrchol $v \in V$ nazveme *izolovaným*, ak nemá žiadneho suseda.

Cesta medzi vrcholmi $u, v \in V$ v grafe G je postupnosť $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1}$ (pre nejaké $k \in \mathbb{N}$), pričom pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ je $v_i \in V$, ďalej platí $v_1 = u$, $v_{k+1} = v$ a pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je hrana $e_i \in E$ taká, že $e_i = v_i v_{i+1}$. Túto postupnosť označujeme aj uv-cesta. Číslo k voláme *dĺžkou cesty*.

Kružnica v grafe G je postupnosť $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1}$ (pre nejaké $k \in \mathbb{N}$), pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ je $v_i \in V$, ďalej platí $v_1 = v_{k+1}$ a pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je hrana $e_i \in E$ taká, že $e_i = v_i v_{i+1}$. Číslo k voláme *dĺžkou kružnice*. Kružnicu voláme *párnou*, ak jej dĺžka je párne číslo, a *nepárnou*, ak jej dĺžka je nepárne číslo.

Graf $G = (V, E)$ voláme *súvislý*, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje uv-cesta.

Každý graf $G = (V, E)$ môžeme zakresliť do roviny nasledovným spôsobom: (disjunktné) bodky budú predstavovať vrcholy grafu, ktoré spojíme čiarou práve vtedy, keď medzi príslušnými vrcholmi existuje hrana. Ak sa graf G dá zakresliť do roviny tak, že sa čiary predstavujúce hrany nepretínajú, voláme tento graf *planárnym*. Každé takéto zakreslenie planárneho grafu do roviny voláme rovinným grafom. Pri rovinnom grafe má zmysel definovať *steny* grafu ako mnohouholníky, ktorých strany sú dané hranami grafu.

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ voláme *podgrafom* grafu G, ak $V_1 \subseteq V$ a $E_1 \subseteq E \cap \binom{V_1}{2}$. Tento vzťah budeme v tomto texte označovať $G_1 \subseteq G$. Množinu V_1 voláme *nezávislou množinou grafu* G, ak graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je podgrafom grafu G takým, že $E_1 = \emptyset$.

Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre ľubovoľnú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ definujeme ich *grafovú vzdialenosť* $\operatorname{dist}(u,v)$ nasledovne:

$$\operatorname{dist}(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{ak } u = v \\ \text{počet hrán na najkratšej } uv\text{-ceste}, & \text{ak } u \neq v \text{ a existuje } uv\text{-cesta} \\ \infty, & \text{ak } u \neq v \text{ a neexistuje } uv\text{-cesta} \end{cases}$$

Ak $v \in V, V_1 \subseteq V$, tak označíme $\operatorname{dist}(v, V_1) = \min\{\operatorname{dist}(v,w); w \in V_1\}$. V ďalšom texte budeme grafovú vzdialenosť volať iba skrátene vzdialenosť.

Hovoríme, že množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$, kde $k \in \mathbb{N}$, tvoria *rozklad* množiny A, ak platí $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$ a zároveň pre každé relevantné i, j, pričom $i \neq j$, platí $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Graf $G = (V, E)$ budeme volať *bipartitný* (*párny*), ak existujú množiny A, B, ktoré tvoria rozklad množiny V, pričom pre každú hranu $e = uv$ z množiny E platí, že $u \in A, v \in B$ alebo $u \in B, v \in A$.

Uvedieme teraz bez dôkazu známu vetu, ktorá dáva nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby bol graf bipartitný.

Veta 1.1 Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Graf G je bipartitný práve vtedy, keď graf G neobsahuje nepárne kružnice.

Po tom, ako sme uviedli základné označenia, môžeme prejsť k definovaniu grafu, ktorému budeme venovať prevažnú časť tejto diplomovej práce.

Uvažujme rozklad euklidovskej roviny na pravidelné šesťuholníky, ktoré sa prekrývajú nanajvýš hranami a z ktorých každý má polomer opísanej kružnice rovný 1. Množinu vrcholov týchto šesťuholníkov označíme V_H a množinu ich hrán označíme E_H.

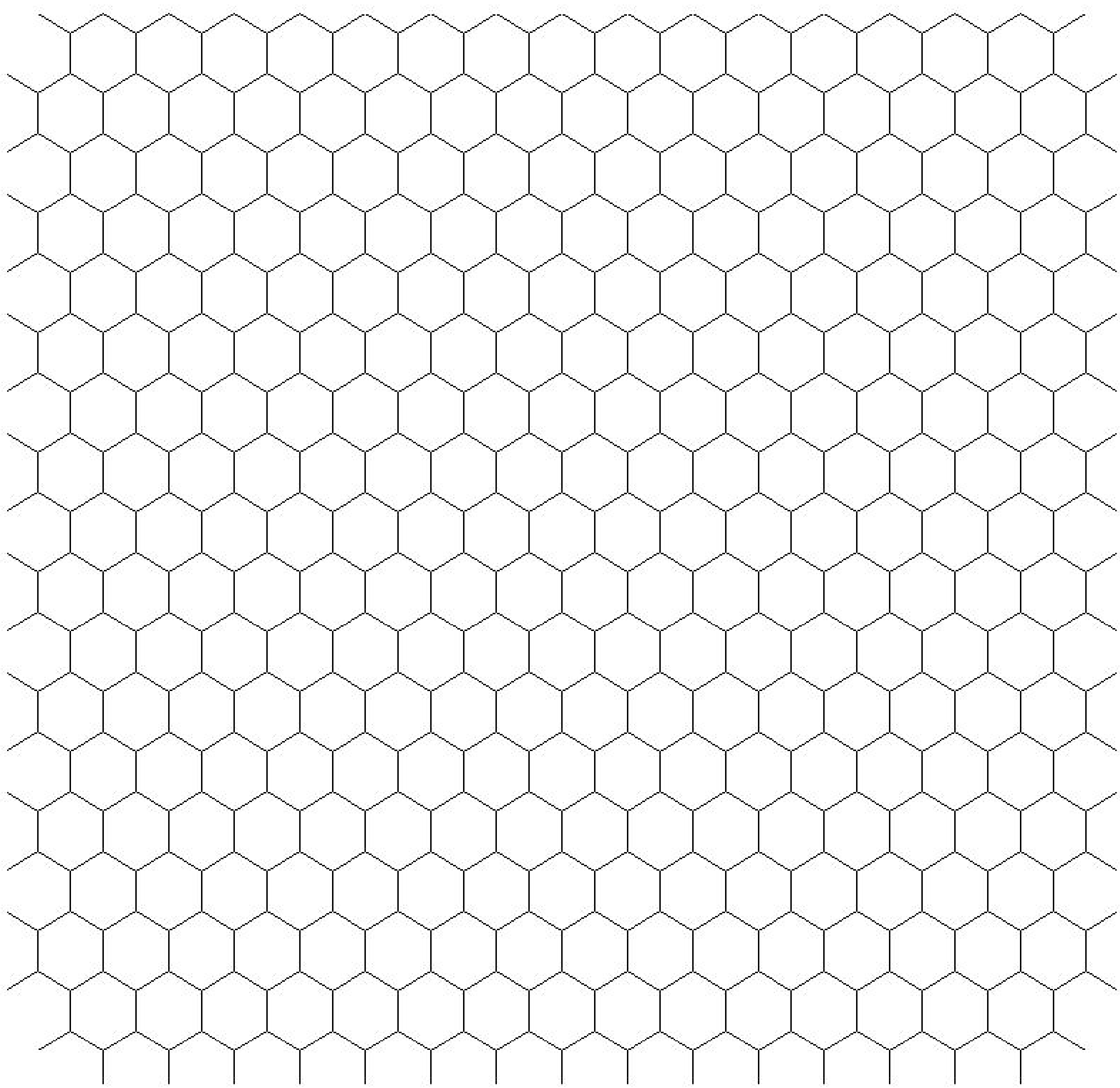
Nekonečná šesťuholníková sieť $H = (V_H, E_H)$ je rovinný graf vytvorený vrcholmi z množiny V_H a hranami z množiny E_H (pozri obr. 1). Dĺžka každej hrany je potom 1, každý vrchol má práve troch susedov a tiež H je súvislý graf, preto pre ľubovoľnú dvojicu jeho vrcholov $u, v \in V_H$ platí $\operatorname{dist}(u,v) < \infty$.

Veta 1.2 H je bipartitný graf.

DÔKAZ: Vezmime si ľubovoľnú kružnicu $C \subseteq H$. Uvažujme maximálny $H_1 \subseteq H$ taký, že vrcholová množina H_1 je zložená z tých vrcholov, ktorými prechádza C alebo ležia v útvare, ktorý C ohraničuje. Tento útvar má všetky vnútorné steny šesťuholníkové. Nech má k vnútorných stien, označme ich $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Ak q_i je počet hrán steny f_i, potom platí, že $Q = \sum_{i=1}^{k} q_i = 6k$.

Ak hrana je taká, že neleží na C, tak je započítaná v dvoch stenách, povedzme f_i, f_j, nech bez ujmy na všeobecnosti $i < j$. Ak ju z H_1 odstránime (a spolu s ňou aj všetky hrany, ktorých niektorý z koncových vrcholov je visiaci), nech bez ujmy na všeobecnosti q_i označuje počet hrán vzniknutej steny a položme $q_j = 0$. Takýmto odstránením sa Q zmenší o párne číslo (označme ho $2s_1$) a počet stien H_1 sa zmenší o 1. Nech je takých hrán l. Ak odstránime všetky takéto hrany a následne aj všetky izolované vrcholy, zostane nám z pôvodného H_1 už len práve C.

Vieme ale, že teraz už v súčte $Q = 6k - \sum_{i=1}^{l} 2s_i$ nie je žiadna hrana započítaná dva krát, čo znamená, že $6k - \sum_{i=1}^{l} 2s_i$ je počet hrán v C. Preto C má párny počet vrcholov. Ukázali sme, že každá kružnica v H je párna. Odtiaľ už z Vety 1.1 priamo plynie, že H je bipartitný graf. □



Obrázok 1. Nekonečná šesťuholníková sieť H (časť).

Podgraf $O = (V_O, E_O) \subseteq H$ nazveme *okom*, ak spĺňa:

i) $|V_O| = 6$,

ii) $(\forall\ v \in V_O) \deg_O(v) = 2$.

Veta 1.3 Nech $O \subseteq H$. O je okom práve vtedy, keď O je kružnica na šiestich vrcholoch.

DÔKAZ: Oko je definované ako graf so šiestimi vrcholmi, ktoré majú stupeň 2, teda je to kružnica na šiestich vrcholoch. $\square$

V tejto diplomovej práci budeme študovať ofarbenia nekonečnej šesťuholníkovej siete H. Symbol H v celej tejto práci je rezervovaný na označenie tejto siete. Tiež symboly V_H a E_H sú rezervované na označenie vrcholov a hrán nekonečnej šesťuholníkovej siete.

Členenie diplomovej práce je nasledovné:

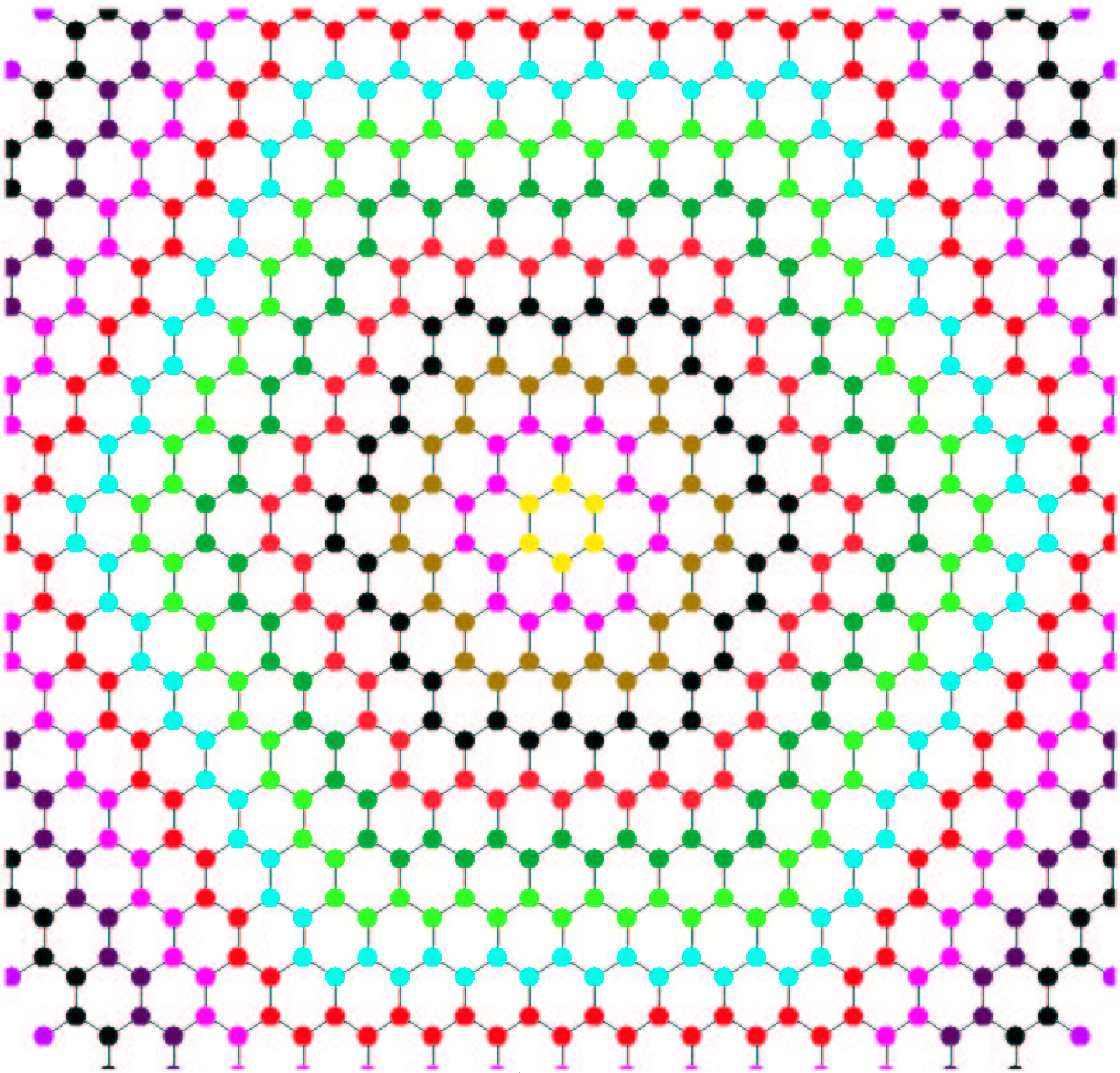
V druhej kapitole uvedieme určité vlastnosti vrcholov nekonečnej šesťuholníkovej siete, keď vytvoríme *prstence vrcholov*. V tretej kapitole zavedieme súradnicovú sústavu, ktorá nám napomôže k zisteniu grafovej vzdialenosti medzi ľubovoľnými dvoma vcholmi.

Štvrtá kapitola je venovaná d-dištančnému chromatickému číslu grafu nekonečnej šesťuholníkovej siete a ukážeme si jeho presnú hodnotu. V piatej kapitole zavedieme $L(K)$-ofarbovacie číslo a uvedieme niekoľko tvrdení, o tomto čísle pre nekonečnú šesťuholníkovú sieť. V nasledujúcej kapitole sa budeme podrobnejšie zaoberať $L(K)$-ofarbovacím číslom nekonečnej šesťuholníkovej siete pre podmienky pre vzdialenosti 1 a 2.

V poslednej, siedmej, kapitole uvedieme niekoľko ohraničení pre $L(K)$-ofarbovacie číslo ľubovoľného grafu s podmienkou pre vzdialenosť 2.

2. Prstence vrcholov

Kvôli neskoršej potrebe pomenujeme v tejto kapitole určité množiny vrcholov. Ľubovoľné, ale pevne zvolené oko $O_0 = (V_0, E_0)$ nazveme *stredným okom* H. Všimnime si, že existuje 6 vrcholov susedných s vrcholmi stredného oka. Tieto majú ďalších 12 susedov (každý vrchol dvoch). Ak si teraz odmyslíme vrcholy stredného oka, ostane nám 18 vrcholov, ktoré tvoria kružnicu a ktoré vytvárajú akýsi *prstenec* okolo stredného oka. Podobne teraz môžeme nájsť ďalší prstenec s tridsiatimi vrcholmi... Týmto spôsobom zrejme vytvoríme rozklad množiny V_H.



Obrázok 2. Prstence V_i v grafe H. (Vrcholy ofarbené rovnakou farbou patria do rovnakého prstenca.)

Vytvorenie jedného prstenca má vždy dve fázy: nájdenie priamych susedov a nájdenie susedov týchto priamych susedov. Priamych susedov budeme potom volať vnútorné vrcholy prstenca a ostatné budú vonkajšie vrcholy prstenca.

Za prvý prstenec vezmeme samotné stredné oko, pričom množina vnútorných vrcholov prvého prstenca bude prázdna a množina vonkajších vrcholov prvého prstenca budú vrcholy stredného oka. Pripomeňme, že V_0 je množina vrcholov stredného oka.

V ďalšom texte budeme uvažovať stále $i \in \mathbb{N}$. Definujeme *i-tý prstenec vrcholov* $P_i = (V_i, E_i)$ ako maximálny podgraf H taký, že $V_i = \{v \in V_H; 2i-3 \leq \mathrm{dist}(v, V_0) \leq 2i-2\}$ (pozri obr. 2). Množinu $R_i = \{v \in V_H; \mathrm{dist}(v, V_0) = 2i-3\}$ budeme volať množinou *vnútorných vrcholov* i-teho prstenca. Množinu $S_i = \{v \in V_H; \mathrm{dist}(v, V_0) = 2i-2\}$ pomenujeme množinou *vonkajších vrcholov* i-teho prstenca. Poznamenajme, že $R_1 = \emptyset$.

V nasledujúcom ukážeme niektoré základné vlastnosti prstencov. Všimnime si, že všetky prstence sú navzájom disjunktné, aj že všetky množiny vonkajších a vnútorných vrcholov sú navzájom disjunktné. A keďže H je súvislý, každý vrchol do niektorého prstenca patrí. Zameriame sa teraz najmä na zistenie toho, kde (t. j. na ktorých prstencoch) sa nachádzajú susedia ľubovoľného vrcholu.

Veta 2.1 Nech v_1 je ľubovoľný sused vrcholu v.

(i) Ak $v \in R_i$ a $i \geq 2$, tak potom $v_1 \in S_{i-1}$ alebo $v_1 \in V_i$.

(ii) Ak $v \in S_i$ a $i \geq 1$, tak potom $v_1 \in V_i$ alebo $v_1 \in R_{i+1}$.

DÔKAZ: Obe tvrdenia dostávame priamo z definície prstencov a ich vnútorných a vonkajších vrcholov. □

Veta 2.2 Ak $i \geq 2$, tak R_i je nezávislá množina.

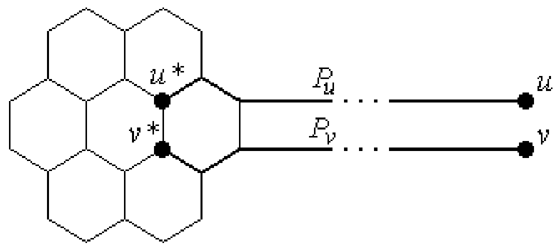
DÔKAZ: Dôkaz vykonáme matematickou indukciou podľa i.

1° Keďže H má šesťuholníkové steny, množina R_2 je nezávislá.

2° Nech veta platí pre $i \geq 2$ a nech $u, v \in R_{i+1}$. Označme $d = \mathrm{dist}(u, V_0) = \mathrm{dist}(v, V_0)$, tiež $Z_u = \{w \in V_0; \mathrm{dist}(u, w) = d\}$, podobne Z_v. Zrejme Z_u, Z_v sú neprázdne množiny. Nech $u^* \in Z_u, v^* \in Z_v$. P_u nech je ľubovoľná uu^*-cesta dĺžky d, podobne P_v (pozri obr. 3). Pre spor predpokladajme, že $\mathrm{dist}(u, v) = 1$ a označme hranu $e = uv$.

Ak by $P_u \cap P_v \neq \emptyset$, tak nech w je prvý taký vrchol na uu^*-ceste. Označme najkratšiu uw-cestu ako P'_u, najkratšiu wv-cestu ako P'_v a $d' = \mathrm{dist}(u, w)$. Najkratšia wu^*-cesta má potom dĺžku $d - d'$, a preto musí tiež platiť $\mathrm{dist}(v, w) = d'$. Potom ale existuje kružnica $P'_v e P'_u$ dĺžky $2d' + 1$. Taká však v H nemôže existovať, pretože H je bipartitný. Musia byť teda množiny P_u a P_v disjunktné.

Nech $P_u = (ue_1u_1e_2u_2 \dots u_{d-1}e_du_d), P_v = (vf_1v_1f_2v_2 \dots v_{d-1}f_dv_d)$, kde $u_d = u^*, v_d = v^*$. Potom u_1, v_1 susedné nie sú a nutne u_2, v_2 susedné sú (kvôli šesťuholníkovým stenám). Ale $u_2, v_2 \in R_i$, ktoré však podľa indukčného predpokladu susedné nie sú. To je však spor, a preto je R_{i+1} nezávislá. $\square$



Obrázok 3. Cesty P_u, P_v.

Veta 2.3 Ak $i \geq 2$, tak v S_i existuje práve 6 navzájom disjunktných dvojíc susedných vrcholov.

Dôkaz: a) Najprv ukážeme, že ak $i \geq 2$, tak v S_i existuje práve 6 navzájom rôznych dvojíc susedných vrcholov. Nech $u, v \in S_i$, $\operatorname{dist}(u,v) = 1$. Pri rovnakom označení a z rovnakých dôvodov ako v predošlej vete vieme, že P_u a P_v musia byť disjunktné. Ďalej dôkaz prevedieme matematickou indukciou podľa i.

1° Nech $i = 2$, teda $u, v \in S_2$. Potom $u_1, v_1 \in R_2$, ktorá je podľa predošlej vety nezávislá. Vrcholy $u_2, v_2 \in S_1$ a kvôli šesťuholníkovým stenám musia byť susedné. Ale $S_1 = V_1$ a na prvom prstenci je takých možností práve 6.

2° Nech tvrdenie platí pre $i \geq 2$ a nech $u, v \in S_{i+1}$. Potom u_1, v_1 susedné nie sú a kvôli šesťuholníkovým stenám u_2, v_2 susedné sú. Ale $u_2, v_2 \in S_i$, kde takých dvojíc existuje práve 6.

b) Teraz ešte ukážeme, že tieto dvojice vrcholov sú navzájom disjunktné.

1° Nech $i = 2$, nech $u, v \in S_2$ je dvojica susedných vrcholov. Navyše predpokladajme, že existuje $w \in S_2$ také, že $\operatorname{dist}(v,w) = 1$. Označme príslušne $P_w = (wg_1w_1g_2w_2)$, pričom $w_2 = w^* \in Z_w$. Potom $u_1, v_1, w_1 \in R_2$, ktorá je podľa predošlej vety nezávislá. Vrcholy $u_2, v_2, w_2 \in S_1$ a kvôli šesťuholníkovým stenám musí byť $\operatorname{dist}(u_2, v_2) = 1$, $\operatorname{dist}(v_2, w_2) = 1$. Aby sa zachovala planarita H a jej šesťuholníkové steny, vrchol v_1 už nemôže mať iných susedov (zatiaľ má susedov v, v_2). Tým sme došli k sporu, lebo vieme, že v H má každý vrchol stupeň 3.

2° Nech tvrdenie vety platí pre $i \geq 2$. S cieľom dosiahnuť spor predpokladajme, že $u, v, w \in S_{i+1}$ sú také, že $\operatorname{dist}(u,v) = 1$, $\operatorname{dist}(v,w) = 1$. Potom (v zmysle označenia ciest P_u, P_v, P_w) vrcholy u_1, v_1 ani v_1, w_1 susedné nie sú a kvôli šesťuholníkovým stenám u_2, v_2 i v_2, w_2 susedné sú. Ale $u_2, v_2, w_2 \in S_i$, kde podľa indukčného predpokladu platí, že všetky dvojice susedných vrcholov sú navzájom disjunktné. Tým sme našli spor. $\square$

Vrcholy spomínané v predchádzajúcej vete budeme volať *rohové*.

Veta 2.4 Nech $i \geq 2, v \in V_i$ a nech v_1, v_2, v_3 sú navzájom rôzni susedia vrcholu v takí, že $\mathrm{dist}(v_1, V_0) \leq \mathrm{dist}(v_2, V_0) \leq \mathrm{dist}(v_3, V_0)$.

(i) Ak $v \in S_i$ je rohový, potom $v_1 \in R_i, v_2 \in S_i, v_3 \in R_{i+1}$.

(ii) Ak $v \in S_i$ nie je rohový, potom $v_1, v_2 \in R_i, v_3 \in R_{i+1}$.

(iii) Ak $v \in R_i$, potom $v_1 \in S_{i-1}$ a $v_2, v_3 \in S_i$.

DÔKAZ: a) Zaradíme najskôr vrchol v_1. Z definície prstencov a definície grafovej vzdialenosti vieme, že musí existovať cesta z vrcholu v do niektorého z vrcholov ležiacich na prvom prstenci. Hneď prvý vrchol po v na tejto ceste, označme ho w, je od prvého prstenca vzdialený $\mathrm{dist}(v, V_0) - 1$. Na základe Vety 2.1 vieme, že pre každého suseda v_i vrcholu v platí, že $\mathrm{dist}(v_i, V_0) \geq \mathrm{dist}(v, V_0) - 1 = \mathrm{dist}(w, V_0)$. Môžeme preto položiť $v_1 = w$. Z uvedeného už vyplýva, že ak $v \in S_i$, tak $v_1 \in R_i$ a ak $v \in R_i$, tak $v_1 \in S_{i-1}$.

b) Teraz ukážeme, že vrchol v má suseda v rovnakej množine práve vtedy, keď $v \in S_i$ je rohový. Vo Vete 2.2 sme ukázali, že množina R_i je nezávislá, takže tam nenájdeme suseda vrchola $v \in R_i$. Podobne na základe Vety 2.3, ak $v \in S_i$ nie je rohový, nemá v S_i suseda. A ak $v \in S_i$ rohový je, má tam práve jedného suseda, a toho označíme v_2.

c) V ďalšom kroku dokážeme, že spomedzi zatiaľ nezaradených vrcholov len v prípade (ii) existuje sused w vrchola v taký, že $\mathrm{dist}(w, V_0) = \mathrm{dist}(v, V_0) - 1$. To dokážeme matematickou indukciou.

Pre $i = 2$ veta triviálne platí. Nech $i \geq 3$ a nech veta platí pre všetky $i_0 < i$. Nech $d = \mathrm{dist}(v, V_0)$, označme $Z_v = \{w \in V_0; \mathrm{dist}(v, w) = d\}$, nech $v^* \in Z_v$. Predpokladajme, že existujú dve rôzne vv^*-cesty $P'_v = (ve'_1v'_1e'_2v'_2 \dots v'_{d-1}e'_dv'_d)$ a $P''_v = (ve''_1v''_1e''_2v''_2 \dots v''_{d-1}e''_dv''_d)$ také, že $v'_1 \neq v''_1$. (Z toho nutne vyplýva, že $d \geq 2$.) Keďže ide o najkratšie cesty, tak vieme, že pre každé $j \in \mathbb{N}, j \leq d$ platí $\mathrm{dist}(v'_j, V_0) = \mathrm{dist}(v''_j, V_0) = d - j$, čiže vrcholy sú striedavo vnútorné a vonkajšie.

Keďže $v'_d = v''_d = v^*$, tak nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že $v'_k = v''_k$, teda v'_k je prvý spoločný vrchol ciest P'_v, P''_v. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že P'_v, P''_v je taká dvojica ciest, že majú k najmenšie možné. Potom zrejme pre všetky $l \in \mathbb{N}, l < k$ platí, že $v'_l \neq v''_l$ a tiež pre $l \leq k$ platí $e'_l \neq e''_l$. Vrcholy v'_{k-1} a v''_{k-1} majú oba rovnakú vzdialenosť $\text{dist}(v'_{k-1}, V_0) = \text{dist}(v''_{k-1}, V_0) = d - k + 1$, patria preto do rovnakej množiny vnútorných, resp. vonkajších vrcholov. Vrchol v'_k je vo vzdialenosti $\text{dist}(v'_k, V_0) = d - k$, a taká situácia môže podľa indukčného predpokladu nastať len v prípade, keď vrchol $v'_k \in R_j$ pre nejaké $j \in \mathbb{N}$.

Potom $v'_{k-1}, v''_{k-1} \in S_j, v'_{k-2}, v''_{k-2} \in R_{j+1}, \ldots$ Vnútorné vrcholy majú podľa indukčného predpokladu dvoch susedov v množine vonkajších vrcholov toho istého prstenca, čo znamená, že zvyšok cesty k vrcholu v môže pokračovať dvoma smermi, a tieto cesty sa môžu znova spojiť buď v nejakom vonkajšom nerohovom vrchole alebo vo vrchole v. Keďže sme cesty P'_v, P''_v vyberali tak, aby bolo k minimálne, nemôžu na nich také „rozdvojovacie“ vrcholy (okrem vrcholu v'_k) existovať. Preto musí byť $v'_k \in R_{i-1}$. Odtiaľ hneď máme, že $\text{dist}(v'_k, v) \leq 3$. Graf H má všetky steny šesťuholníkové, preto môže nastať len možnosť $\text{dist}(v'_k, v) = 3$. Potom nutne $v \in S_i$.

Ak by $v \in S_i$ bol rohový, z dôkazu Vety 2.3 vyplýva, že taký vrchol nemôže mať dve najkratšie cesty P'_v, P''_v. Teda $v \in S_i$ a nie je rohový vrchol. Potom máme jeho dvoch susedov v'_1, v''_1, ktorí sú rôzni, a tých označme v_1, v_2.

d) Z vety 2.1 vyplýva, že všetci ostatní susedia (t.j. pre $v \in R_i$ susedia v_2, v_3 a pre $v \in S_i$ sused v_3) môžu patriť už len do množiny vrcholov, ktoré sú vo vzdialenosti od V_0 o 1 väčšej ako vrchol v. A tým sme zaradili všetky vrcholy tak, ako hovorí znenie vety. $\square$

Teraz máme popísané, ako prstence H vyzerajú. Môžeme teda zistiť, koľko vrcholov sa na ktorom prstenci nachádza.

Veta 2.5 $(\forall i \in \mathbb{N})$ platí $|R_i| = 6(i-1)$ a $|S_i| = 6i$.

DÔKAZ (MI):

1° Podľa definície $|R_1| = 0, |S_1| = 6$.

2° Nech platí $|R_k| = 6(k-1), |S_k| = 6k$ pre $k \geq 2$.

Z predchádzajúcej vety vyplýva, že $|R_{k+1}| = |S_k| = 6k$.

Vieme, že každý vrchol $v \in R_k$ má dvoch susedov v S_k, z ktorých každý má jedného suseda v R_{k+1} (ktorí sú rôzni, lebo by vznikla štvorcová stena). V S_{k+1} existuje práve jeden vrchol, ktorý s týmito vrcholmi vytvára oko. Ďalej, ak sú dva vrcholy z S_k susedné, každý z nich má jedného suseda v R_{k+1} (opäť rôzni). V S_{k+1} existujú práve dva vrcholy, ktoré s týmito vrcholmi vytvárajú oko. Keďže takých dvojíc vrcholov je práve 6, týmto spôsobom nájdeme 12 vrcholov v S_{k+1}. Teda $|S_{k+1}| = |R_k| + 12 = 6(k-1) + 12 = 6(k+1)$. $\square$

Dôsledok 2.5.1 $(\forall i \in \mathbb{N})$ platí $|V_i| = 6(2i-1)$.

Dôsledok 2.5.2 $\sum\limits_{i=1}^{k} |V_i| = 6k^2$.

Dôkaz:

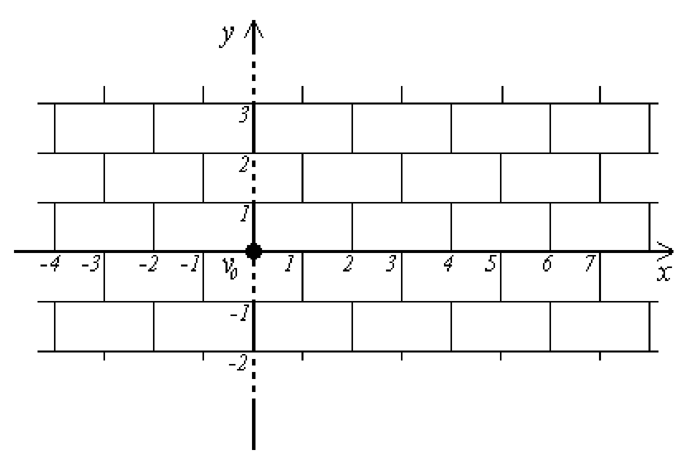
$$\sum_{i=1}^{k} |V_i| = \sum_{i=1}^{k} 6(2i-1) = 12\sum_{i=1}^{k} i - 6\sum_{i=1}^{k} 1 = 12\frac{k(k+1)}{2} - 6k = 6k^2.$$

$\square$

3. Súradnicová sústava v grafe H

Keď sa pozrieme na V_H, vrcholy môžeme rozdeliť na dva typy podľa toho, ktorým smerom ležia ich hrany. Povieme, že vrchol v je typu 0, ak má hrany v smeroch „hore“, „vľavo-dole“ a „vpravo-dole“. Typu 1 sú všetky ostatné vrcholy. Pre typ vrcholu v budeme používať označenie $\tau(v)$. Hrany, ktoré vedú „hore“ alebo „dole“, budeme ďalej nazývať *vertikálne*.

Pre názornejšie zavedenie súradnicovej sústavy zmeníme teraz zakreslenie grafu H v rovine. Môžeme to urobiť, lebo samotné zakreslenie nezmení kombinatorické vlastnosti grafu. Všetky hrany, ktoré nie sú vertikálne, pootočíme tak, aby sa stali horizontálnymi. Teda hrany, ktoré zovierajú s vertikálnymi hranami uhol $\frac{4\pi}{3}$ (proti smeru hodinových ručičiek), pootočíme o $\frac{\pi}{6}$. A hrany, ktoré zovierajú s vertikálnymi hranami uhol $\frac{2\pi}{3}$ (proti smeru hodinových ručičiek), pootočíme o $-\frac{\pi}{6}$. Ak ešte posunieme vrcholy tak, aby všetky hrany mali dĺžku 1, dostaneme graf, ktorého vrcholy vytvárajú štvorcovú mriežku (ale hrany nie). (Pozri obr. 4.)



Obrázok 4. Súradnicová sústava v grafe H.

Zavedieme teraz súradnicovú sústavu. Nech v_0 je ľubovoľný, no pevne zvolený vrchol typu 0; budeme ho nazývať *stredom* súradnicovej sústavy. V smere jeho hrany smerom „hore“ bude y-ová os, zorientovaná smerom od v_0. Od y-ovej osi zorientovaná o $\frac{\pi}{2}$ v smere hodinových ručičiek bude x-ová os.

Ľubovoľný vrchol $v \in V_H$ môžeme pomocou tejto súradnicovej sústavy zapísať v tvare $v = (x, y)$. Napr. vrchol $v_0 = (0, 0)$, jeho susedné vrcholy sú: $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$. Dva susedné vrcholy majú vždy jednu zo súradníc rovnakú a v druhej sa líšia o 1. Nie vždy však dva vrcholy, ktoré majú jednu súradnicu rovnakú a v druhej sa líšia len o 1, budú susedné (napr. $(0,0)$ a $(0,-1)$) — bude to závisieť od ich typov. Ak vezmeme vrcholy (x,y) a $(x,y+1)$, tak sú susedné práve vtedy, keď vrchol (x,y) je typu 0. Zrejme platí, že $\tau(v) = [(x+y) \mod 2]$.

Nasledujúca veta hovorí o tom, aká je vzdialenosť dvoch ľubovoľných vrcholov.

Veta 3.1 Nech $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$. Navyše nech $b_1 \geq b_2$. Potom

(i) ak $|a_1 - a_2| \geq |b_1 - b_2|$, tak $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$;

(ii) ak $|a_1 - a_2| < |b_1 - b_2|$, tak $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = 2|b_1 - b_2| - \tau(v_1) + \tau(v_2)$.

DÔKAZ: ad (i): Nie je ťažké nahliadnuť, že v tomto prípade každá v_1v_2-cesta musí obsahovať aspoň $|a_1 - a_2|$ horizontálnych hrán a aspoň $|b_1 - b_2|$ vertikálnych hrán. A v_1v_2-cesta obsahujúca presne $|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$ hrán existuje pre každú dvojicu vrcholov.

ad (ii): Nech $v_3 = (a_2 + (b_1 - b_2), b_1)$, rozoberieme 3 prípady:

α) $\tau(v_1) = \tau(v_2)$: zrejme $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = \mathrm{dist}(v_3, v_2) = |a_2 + (b_1 - b_2) - a_2| + |b_1 - b_2| = 2|b_1 - b_2|$;

β) $\tau(v_1) = 0, \tau(v_2) = 1$: zrejme $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = \mathrm{dist}(v_3, v_2) + 1 = |a_2 + (b_1 - b_2) - a_2| + |b_1 - b_2| + 1 = 2|b_1 - b_2| + 1$;

γ) $\tau(v_1) = 1, \tau(v_2) = 0$: zrejme $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = \mathrm{dist}(v_3, v_2) - 1 = |a_2 + (b_1 - b_2) - a_2| + |b_1 - b_2| - 1 = 2|b_1 - b_2| - 1$. $\square$

Dôsledok 3.1.1 $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq 2|b_1 - b_2| - 1$.

Dôsledok 3.1.2 $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq |a_1 - a_2|$.

Časť druhá:

d-dištančné chromatické číslo

4. Nutné a postačujúce podmienky

Majme graf $G = (V, E)$. Nech $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina farieb. Každú funkciu $\varphi_P : V \longrightarrow P$ nazývame *(vrcholovým) ofarbením* grafu G (alebo tiež n-*ofarbením*). Budeme hovoriť, že ofarbenie φ_P *využíva* n farieb.

Ak $d \in \mathbb{N}$ je dané číslo (vzdialenosť), tak každé ofarbenie φ_P také, že ľubovoľné dva vrcholy, ktoré sú od seba vzdialené nanajvýš d, sú ofarbené rôznymi farbami, nazveme d-*dištančné ofarbenie*. Potom d-*dištančné chromatické číslo* $\chi_d(G)$ grafu G definujeme ako minimálny počet farieb potrebný pre d-dištančné ofarbenie grafu G. Formálne,

$$\chi_d(G) = \min \{n; (\exists \varphi_P)(\forall\ v, w \in V)\,(\mathrm{dist}(v, w) \leq d \implies \varphi_P(v) \neq \varphi_P(w))\}\,.$$

Všimnime si, že ak φ je ofarbenie, pri ktorom sa nadobúda minimum, tak existujú vrcholy u, v také, že $\varphi(u) = 1, \varphi(v) = n$. Ak by totiž niektorý z nich neexistoval, vedeli by sme nájsť d-dištančné ofarbenie využívajúce menší počet farieb.

Dištančným ofarbovaním nekonečných sietí sa zaoberali autori napr. v [11]. V tejto kapitole uvedieme tvrdenia, ktoré sa týkajú d-dištančného chromatického čísla grafu H, čiže budeme používať skrátene $\chi_d = \chi_d(H)$.

Systém množín $\{F_i, i \in I\}$ voláme *systémom farebných tried*, ak platí zároveň:

(i) $\{F_i, i \in I\}$ tvorí rozklad množiny V_H;

(ii) existuje prosté zobrazenie $\psi : I \longrightarrow P$, kde $P = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ak $i \in I$ a $v \in F_i$, tak môžeme položiť $\varphi_P(v) = \psi(i)$, teda systém farebných tried indukuje ofarbenie φ_P. Uvedieme teraz niekoľko farebných tried, ktoré využijeme pri ofarbovaní grafu H. Nech $[x]$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ označuje zaokrúhlenie čísla x na celé číslo, t. j. platí $[x] \in \mathbb{Z}$ a $x - \dfrac{1}{2} < [x] \leq x + \dfrac{1}{2}$.

Lema 4.1 Nech $I = \{(i, j); i \in \{0, 1, 2, 3\}$ a $j \in \{0, 1\}$ a $i + j = 0 \pmod 2\}$. Systém množín

$$F_{i,j} = \{(a, b) \vee (a + 2, b + 1);\ a \equiv i \pmod 4 \wedge b \equiv j \pmod 2\},$$

pre $(i, j) \in I$, je systémom farebných tried a existuje zobrazenie ψ také, že tento systém indukuje ofarbenie $\varphi_P : V_H \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

DÔKAZ: (i) Vezmime ľubovoľný vrchol $(x, y) \in V_H$. Ak súčet $x + y$ je párne číslo, tak označme ako i zvyšok čísla x po delení 4 a j zvyšok čísla y po delení 2. Ak súčet $x + y$ je nepárne číslo, tak označme ako i zvyšok čísla $x - 2$ po delení 4 a j zvyšok čísla $y - 1$ po delení 2. Potom je $i + j$ párne, čiže $(i, j) \in I$ a platí $(x, y) \in F_{i,j}$.

Tiež je zrejmé, že dvojica (i, j) je určená jednoznačne, teda každý vrchol patrí do práve jednej z množín, ktoré tým pádom tvoria rozklad V_H.

(ii) Položme $\psi(i, j) = i + 1$ pre $(i, j) \in I$. Vidíme, že toto zobrazenie je prosté z množiny I do množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. $\square$

Lema 4.2 Nech $k \in \mathbb{N}$ a $I = \{(i, j); i \in \{0, 1, 2, \ldots, 3k-1\}$ a $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2k-1\}\}$. Systém množín

$$F_{i,j} = \{(a, b) \vee (a + 3k, b + k);\; a \equiv i \pmod{6k} \wedge b \equiv j \pmod{2k}\},$$

pre $(i, j) \in I$, je systémom farebných tried a existuje zobrazenie ψ také, že tento systém indukuje ofarbenie $\varphi_P : V_H \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 6k^2\}$.

DÔKAZ: (i) Vezmime ľubovoľný vrchol $(x, y) \in V_H$. Ak zvyšok čísla x po delení číslom $6k$ je menší ako $3k$, tak označme ako i zvyšok čísla x po delení $6k$ a j zvyšok čísla y po delení $2k$. Ak zvyšok čísla x po delení číslom $6k$ je aspoň $3k$, tak označme ako i zvyšok čísla $x - 3k$ po delení $6k$ a j zvyšok čísla $y - k$ po delení $2k$. Potom určite $(i, j) \in I$ a platí $(x, y) \in F_{i,j}$. Tiež si môžeme všimnúť, že dvojica (i, j) je určená jednoznačne, teda každý vrchol patrí do práve jednej z množín, ktoré tým pádom tvoria rozklad V_H.

(ii) Položme $\psi(i, j) = 2ki + j + 1$ pre $(i, j) \in I$. Toto zobrazenie je prosté, keďže j nadobúda iba hodnoty z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 2k-1\}$, a je zobrazením do množiny $\{1, 2, \ldots, 6k^2\}$. $\square$

Lema 4.3 Nech $k \in \mathbb{N}$ a $I = \{(i, j); i \in \{0, 1, 2, \ldots, 3k\}$ a $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2k\}\} \cup \{(3k + 1, j); j \in \{k, k+1, k+2, \ldots, 2k\}\}$. Systém množín

$$F_{i,j} = \{(a, b) \vee (a + 3k + 2, b + k);$$
$$a = i + s + (6k + 3)t, b = j + (2k + 1)s - t, s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}\},$$

pre $(i, j) \in I$, je systémom farebných tried a existuje zobrazenie ψ také, že tento systém indukuje ofarbenie $\varphi_P : V_H \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 6k^2 + 6k + 2\}$.

DÔKAZ: (i) Vezmime ľubovoľný vrchol $(x, y) \in V_H$. Potrebujeme nájsť čísla i, j tak, aby $(i, j) \in I$ a $(x, y) \in F_{i,j}$. Označme $x' \equiv x \pmod{12k^2 + 12k + 4}, y' \equiv y \pmod{12k^2 + 12k + 4}$. Ak teraz k vrcholu $(x', y') \in V_H$ nájdeme čísla i', j' také že $(x', y') \in F_{i',j'}$, tak potom aj $(x, y) \in F_{i',j'}$. Stačí si totiž uvedomiť, že musí platiť $s' \equiv s \pmod{12k^2 + 12k + 4}, t' \equiv t \pmod{12k^2 + 12k + 4}$. Dá sa ďalej dokázať, že k vrcholu (x', y') sa príslušné i', j' dajú nájsť jednoznačne (dôkaz je technicky náročný, preto ho tu neuvádzame). Teda každý vrchol patrí do práve jednej z množín, ktoré tým pádom tvoria rozklad V_H.

(ii) Nech $\delta_{p,r}$ je Kroneckerovo δ, teda funkcia taká, že $\delta_{p,r} = 1$, ak $p = r$ a $\delta_{p,r} = 0$, ak $p \neq r$. Položme $\psi(i,j) = (2k+1)i + j + 1 - k\delta_{3k+1,i}$ pre $(i,j) \in I$. Toto zobrazenie je prosté, keďže j nadobúda iba hodnoty z množiny $\{0,1,2,\ldots,2k\}$, a je zobrazením do množiny $\{1,2,\ldots,6k^2+6k+2\}$. $\square$

Lema 4.4 Nech $k \in \mathbb{N}$ a $I = \{(i,j); i \in \{0,1,2,\ldots,6k+3\}$ a $j \in \{0,1,2,\ldots,2k+1\}$ a $i+j = 0 \pmod 2\}$. Systém množín

$$F_{i,j} = \{(a,b) \vee (a-3k-2, b+k+1);\ a \equiv i \pmod{6k+4} \wedge b \equiv j \pmod{2k+2}\},$$

pre $(i,j) \in I$, je systémom farebných tried a existuje zobrazenie ψ také, že tento systém indukuje ofarbenie $\varphi_P : V_H \longrightarrow \{1,2,\ldots,6k^2+10k+4\}$.

Dôkaz: (i) Vezmime ľubovoľný vrchol $(x,y) \in V_H$. Ak súčet $x+y$ je párne číslo, tak označme ako i zvyšok čísla x po delení $6k+4$ a j zvyšok čísla y po delení $2k+2$. Ak súčet $x+y$ je nepárne číslo, tak označme ako i zvyšok čísla $x+3k+2$ po delení $6k+4$ a j zvyšok čísla $y-k-1$ po delení $2k+2$. Potom je $i+j$ párne, čiže $(i,j) \in I$ a platí $(x,y) \in F_{i,j}$. Tiež je zrejmé, že dvojica (i,j) je určená jednoznačne, teda každý vrchol patrí do práve jednej z množín, ktoré tým pádom tvoria rozklad V_H.

(ii) Položme $\psi(i,j) = (k+1)i + \left[\frac{j+1}{2}\right]$ pre $(i,j) \in I$. Toto zobrazenie je prosté, keďže pre pevné i nadobúda j iba každú druhú hodnotu z množiny $\{0,1,2,\ldots,2k+1\}$, a je zobrazením do množiny $\{1,2,\ldots,6k^2+10k+4\}$. $\square$

Lema 4.5 Nech $k \in \mathbb{N}$ a $I = \{(i,j); i \in \{0,1,2,\ldots,6k\}$ a $j \in \{0,1,2,\ldots,2k\}$ a $i+j = 0 \pmod 2\}\}$. Systém množín

$$F_{i,j} = \{(a,b) \vee (a+3k+1, b+k);$$
$$a = i + s - (6k+1)t, b = j + (2k+1)s + t, s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z}\},$$

pre $(i,j) \in I$, je systémom farebných tried a existuje zobrazenie ψ také, že tento systém indukuje ofarbenie $\varphi_P : V_H \longrightarrow \{1,2,\ldots,6k^2+4k+1\}$.

Dôkaz: (i) Vezmime ľubovoľný vrchol $(x,y) \in V_H$. Potrebujeme nájsť čísla i,j tak, aby $(i,j) \in I$ a $(x,y) \in F_{i,j}$. Označme $x' \equiv x \pmod{12k^2+8k+2}, y' \equiv y \pmod{12k^2+8k+2}$. Ak teraz k vrcholu $(x',y') \in V_H$ nájdeme čísla i',j' také že $(x',y') \in F_{i',j'}$, tak potom aj $(x,y) \in F_{i',j'}$. Stačí si totiž uvedomiť, že musí platiť $s' \equiv s \pmod{12k^2+8k+2}, t' \equiv t \pmod{12k^2+8k+2}$. Dá sa ďalej dokázať, že k vrcholu (x',y') sa príslušné i',j' dajú nájsť jednoznačne (dôkaz je technicky náročný, preto ho tu neuvádzame). Teda každý vrchol patrí do práve jednej z množín, ktoré tým pádom tvoria rozklad V_H.

(ii) Položme $\psi(i,j) = ki + \left[\frac{i+j+1}{2}\right]$ pre $(i,j) \in I$. Toto zobrazenie je prosté, keďže pre pevné i nadobúda j iba každú druhú hodnotu z množiny $\{0,1,2,\dots,2k\}$, a je zobrazením do množiny $\{1,2,\dots,6k^2+4k+1\}$. $\square$

Dokázanie nutných a postačujúcich podmienok rozdelíme podľa d na niekoľko možností, v rámci ktorých sa dajú dôkazy vykonať rovnakým spôsobom, no medzi ktorými existujú zásadné rozdiely.

Veta 4.6 Pre d-dištančné chromatické číslo χ_d grafu H platí:

$$\chi_d = \begin{cases} \left[\frac{3}{8}(d+1)^2\right], & \text{ak } d \text{ je nepárne;} \\ \left[\frac{3}{8}\left(d+\frac{4}{3}\right)^2\right], & \text{ak } d \text{ je párne.} \end{cases}$$

Dôkaz:

1.) Pre $d = 1$ ide o jednoduché ofarbovanie grafu. Keďže vieme, že H je bipartitný, sú nutné a zároveň stačia 2 farby.

2.) Nech $d = 2$. Ľubovoľný vrchol v a jeho traja susedia musia byť ofarbení navzájom rôznymi farbami, lebo vzdialenosť medzi nimi nie je väčšia ako $2 = d$. Teda $\chi_d \geq 4$. Vezmime ofarbenie φ_P dané Lemou 4.1. Nie je ťažké nahliadnuť, že to je 2-dištančné ofarbenie. Preto $\chi_d = 4$.

3.) Nech $d = 4k-1, k \in \mathbb{N}$. Uvažujme všetky vrcholy patriace množinám $V_1, V_2, \dots, V_k$ (pozri obr. 5). Každý z nich je vzdialený od prvého prstenca nanajvýš $2(k-1)$. Na prvom prstenci je najväčšia možná vzdialenosť dvoch vrcholov 3, teda ľubovoľné dva z uvažovaných vrcholov sú od seba vzdialené nanajvýš $2 \cdot 2(k-1)+3 = 4k-1 = d$. Preto všetky musia byť ofarbené rôznymi farbami. Ich počet je

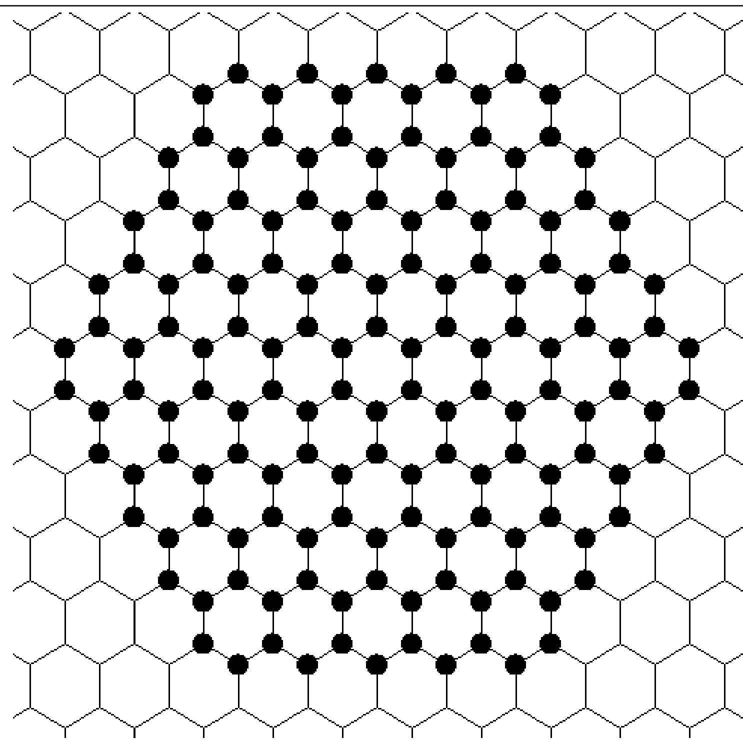
$$6k^2 = 6\left(\frac{d+1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}(d+1)^2, \text{ teda } \chi_d \geq \frac{3}{8}(d+1)^2.$$

Teraz ukážeme, že toľko farieb na ofarbenie H stačí. Systém farebných tried z Lemy 4.2 indukuje zobrazenie φ_P, ktoré využíva $6k^2 = \frac{3}{8}(d+1)^2$ farieb. Našli sme ofarbenie s požadovaným počtom farieb. Potrebujeme ešte ukázať, že vrcholy ofarbené rovnakou farbou sú od seba vzdialené viac ako d. Pre ľubovoľné, ale pevne zvolené i, j z indexovej množiny vezmime rôzne vrcholy $v_1, v_2 \in F_{i,j}$. Nech

$v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$ a nech bez ujmy na všeobecnosti $b_1 \geq b_2$. Rozoberieme dve možnosti:

(i) ak $a_1 \equiv a_2 \pmod{6k}$:
Z toho nutne vyplýva, že $b_1 \equiv b_2 \pmod{2k}$. Ak $a_1 \neq a_2$, potom podľa Dôsledku 3.1.2 je $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq |a_2 - a_1| \geq 6k > d$. Pre možnosť $a_1 = a_2$ je potrebné uvedomiť si, že vrcholy v_1, v_2 sú rovnakého typu, pretože existuje číslo $y \in \mathbb{N}$ také, že $b_1 = b_2 + 2ky$. Potom už z Vety 3.1 plynie, že $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = 2|b_2 - b_1| \geq 4k > d$.

(ii) ak $a_1 \equiv a_2 - 3k \pmod{6k}$:
Z toho nutne vyplýva, že $b_1 \equiv b_2 - k \pmod{2k}$: teda existujú čísla $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$ také, že $a_1 = a_2 - 3k + 6kx, b_1 = b_2 - k + 2ky$. Ak $x > 1$ alebo $x < 0$, tak podľa Dôsledku 3.1.2 máme $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq |a_2 - a_1| \geq 9k > d$. Ak $y > 1$, tak $|b_1 - b_2| \geq 3k$ a podľa Dôsledku 3.1.1 je $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq 2|b_2 - b_1| - 1 \geq 6k - 1 > d$. Vo zvyšných prípadoch je $x = 0$ alebo $x = 1$, teda $|a_2 - a_1| = 3k$, a $y = 1$, teda $|b_2 - b_1| = k$. Z toho vieme, že $|a_2 - a_1| \geq |b_2 - b_1|$ a tak použitím Vety 3.1 dostávame $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1| = 4k > d$.

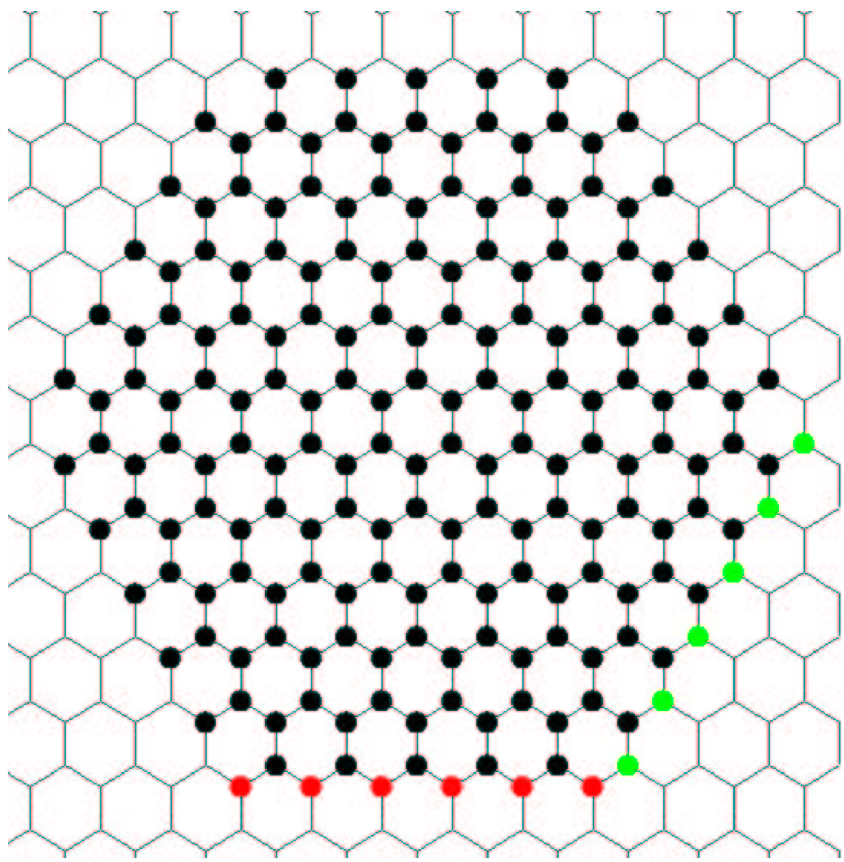


Obrázok 5. Množiny $V_1, V_2, \ldots, V_k$ (pre $k = 5$).

Iné možnosti vrcholov neexistujú (prípad "$a_1 - 3k \equiv a_2 \pmod{6k}$" je ekvivalentný s (ii)), preto ofarbenie φ_P z Lemy 4.2 je hľadaným d-dištančným ofarbením.

4.) Nech $d = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Uvažujme všetky vrcholy patriace množinám $V_1, V_2, \ldots, V_k$ a množine vnútornych vrcholov R_{k+1}. Ľubovoľné dva z uvažovaných vrcholov sú vzdialené nanajvýš $2\,(2(k+1)-3)+3 = 4k+1 = d$. Teda všetky musia byť ofarbené rôznymi farbami. Ich počet je

$$6k^2 + 6k = 6k\,(k+1) = 6\left(\frac{d-1}{4}\right)\left(\frac{d-1}{4}+1\right) = \frac{3}{8}\,(d+1)^2 - \frac{3}{2}.$$



Obrázok 6. Množiny $V_1, V_2, \ldots, V_k, R_{k+1}$ (čierne vrcholy) a dve „hrany“ útvaru (červené a modré vrcholy). (pre $k = 5$).

Všimnime si ale teraz zvyšné vrcholy na $(k+1)$-vom prstenci. Je ich $6k + 6$. Konkrétne zamerajme pozornosť na $k+1$ z nich, ktoré tvoria jednu „hranu“ celého útvaru (pozri obr. 6). Ich vzájomná grafová vzdialenosť je nanajvýš $2k$, teda musia byť ofarbené rôznymi farbami. Navyše ak by sme chceli použiť len doteraz používané farby, tak každý z nich môže mať len farbu jedného z vrcholov z množiny R_{k+1} na protiľahlej „hrane“ útvaru. Tých je tam ale len k, takže podľa Dirichletovho princípu potrebujeme aspoň jednu novú farbu.

Rovnako, ak sa zameriame na $k+1$ vrcholov na susednej „hrane“ útvaru, tiež potrebujeme aspoň jednu novú farbu. A nemôže to byť rovnaká farba, lebo vzdialenosť ľubovoľných dvoch vrcholov na dvoch susedných „hranách“ útvaru je maximálne $2k+1+2k=d$. Preto počet nutne potrebných farieb je

$$\chi_d \geq \frac{3}{8}(d+1)^2 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{8}(d+1)^2 + \frac{1}{2}.$$

Teraz ukážeme, že toľko farieb na ofarbenie H stačí. Systém farebných tried z Lemy 4.3 indukuje zobrazenie φ_P, ktoré využíva $6k^2+6k+2 = \frac{3}{8}(d+1)^2+\frac{1}{2}$ farieb. Našli sme ofarbenie s požadovaným počtom farieb. Potrebujeme ešte ukázať, že vrcholy ofarbené rovnakou farbou sú od seba vzdialené viac ako d. Pre ľubovoľné, ale pevne zvolené i, j z indexovej množiny vezmime rôzne vrcholy $v_1, v_2 \in F_{i,j}$. Nech $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$ a nech bez ujmy na všeobecnosti $b_1 \geq b_2$.

Ak ukážeme, že $|a_1 - a_2| > 4k+1$, tak podľa Dôsledku 3.1.2 je $\operatorname{dist}(v_1, v_2) \geq |a_1 - a_2| > 4k+1 = d$. A ak ukážeme, že $|b_1 - b_2| > 2k+1$, tak podľa Dôsledku 3.1.1 je $\operatorname{dist}(v_1, v_2) \geq 2|b_1 - b_2| - 1 > 4k+1 = d$. Rozoberieme 4 možnosti:

(i) ak existujú $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ také, že

$$a_1 = i + x_1 + (6k+3)y_1,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 - y_1,$$
$$a_2 = i + x_2 + (6k+3)y_2,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 - y_2.$$

Teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ také, že $a_1 - a_2 = x + (6k+3)y$ a $b_1 - b_2 = (2k+1)x - y$ a nie sú obe rovné nule (inak by $v_1 = v_2$). Ak $y = 0$ (teda $x \neq 0$), tak pre $|x| > 1$ je $|b_1 - b_2| > 2k+1$. V prípade, že $|x| = 1$, máme $|b_1 - b_2| = 2k+1$ a $|a_1 - a_2| = 1$, a podľa Vety 3.1 je $\operatorname{dist}(v_1, v_2) = 2|b_1 - b_2| = 4k+2 > d$.

Nech je teraz $y > 0$. Ak $x \geq 0$, je $|a_1 - a_2| \geq 6k+3 > 4k+1$. Keďže má byť $b_1 \geq b_2$, tak x nemôže byť záporné. Nakoniec nech $y < 0$. Ak $x \leq 0$, je $|a_1 - a_2| \geq 6k+3 > 4k+1$. Ak $x > 0$, je $|b_1 - b_2| > 2k+1$.

(ii) ak existujú $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ také, že

$$a_1 = i + x_1 + (6k+3)y_1 + 3k + 2,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 - y_1 + k,$$
$$a_2 = i + x_2 + (6k+3)y_2 + 3k + 2,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 - y_2 + k.$$

Tento prípad sa však prevedie na (i).

(iii) ak existujú $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ také, že

$$a_1 = i + x_1 + (6k+3)y_1,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 - y_1,$$
$$a_2 = i + x_2 + (6k+3)y_2 + 3k + 2,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 - y_2 + k.$$

Teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ také, že $a_1 - a_2 = x + (6k + 3)y - 3k - 2$ a $b_1 - b_2 = (2k+1)x - y - k$. Ak $x = y = 0$, máme $|a_1 - a_2| = 3k + 2$ a $|b_1 - b_2| = k$. Podobne, ak $x = 1$ a $y = 0$ je $|a_1 - a_2| = 3k + 1$ a $|b_1 - b_2| = k + 1$. Nakoniec pre $x = 1$ a $y = 1$ je $|a_1 - a_2| = 3k + 2$ a $|b_1 - b_2| = k$. Teda vo všetkých troch prípadoch podľa Vety 3.1. platí, že $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| = 4k + 2 > d$. Prípad $x = 0, y = 1$ nemôže nastať, lebo by neplatilo $b_1 \geq b_2$.

Ak $x \geq 2$ a $y = 1$ alebo $y = 0$, tak $|b_1 - b_2| \geq 3k + 1 > 2k + 1$. Za podmienok $x \geq 0, y \geq 0$ (okrem už vyššie rozobraných možností) je $|a_1 - a_2| \geq 9k + 4 > 4k + 1$. Prípad $x < 0, y \geq 0$ nemôže nastať, lebo by neplatilo $b_1 \geq b_2$.

Nech je teraz $y \leq -1$. Pre $x \leq 1$ platí $|a_1 - a_2| \geq 9k + 4 > 4k + 1$. Pre $x \geq 2$ je $|b_1 - b_2| \geq 3k + 3 > 2k + 1$.

(iv) ak existujú $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ také, že

$$a_1 = i + x_1 + (6k + 3)y_1 + 3k + 2,\ b_1 = j + (2k + 1)x_1 - y_1 + k,$$
$$a_2 = i + x_2 + (6k + 3)y_2,\ b_2 = j + (2k + 1)x_2 - y_2.$$

Teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2 + 1, y = y_1 - y_2 + 1$ také, že $a_1 - a_2 = x + (6k + 3)y - 3k - 2$ a $b_1 - b_2 = (2k + 1)x - y - k$. Tým sme ale dostali rovnakú situáciu ako v (iii).

Ofarbenie φ_P z Lemy 4.3 je teda hľadaným d-dištančným ofarbením grafu H.

5.) Nech $d = 4k+2, k \in \mathbb{N}$. Systém farebných tried z Lemy 4.4 indukuje ofarbenie φ_P, ktoré využíva $6k^2+10k+4 = \frac{3}{8}\left(d + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}$ farieb. Máme teda ofarbenie s požadovaným počtom farieb. Potrebujeme ešte ukázať, že vrcholy ofarbené rovnakou farbou sú od seba vzdialené viac ako d. Pre ľubovoľné, ale pevne zvolené i, j z indexovej množiny vezmime rôzne vrcholy $v_1, v_2 \in F_{i,j}$. Nech $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$ a nech bez ujmy na všeobecnosti $b_1 \geq b_2$. Rozoberieme 4 možnosti:

(i) $\tau(v_1) = 0, \tau(v_2) = 0$:
To znamená, že $a_1 \equiv a_2 \pmod{6k + 4} \wedge b_1 \equiv b_2 \pmod{2k + 2}$, teda existujú čísla $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}_0$ také, že $a_1 = a_2 + x(6k + 4), b_1 = b_2 + y(2k + 2)$ a nie obe rovné nule. Ak $y > 0$, potom podľa Dôsledku 3.1.1 platí $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq 2(b_1 - b_2) - 1 \geq 2(2k+2) - 1 = 4k+3 > d$. Ak $y = 0$, máme $b_1 = b_2$ a keďže teraz $x \neq 0$, tak podľa Vety 3.1 je potom $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = |a_2 - a_1| = |x| \cdot (6k + 4) \geq 6k + 4 > d$.

(ii) $\tau(v_1) = 1, \tau(v_2) = 1$:
To znamená, že $a_1 - 3k - 2 \equiv a_2 - 3k - 2 \pmod{6k + 4} \wedge b_1 + k + 1 \equiv b_2 + k + 1 \pmod{2k + 2}$, čo je rovnaký prípad ako (i).

(iii) $\tau(v_1) = 0, \tau(v_2) = 1$:
To znamená, že $a_1 \equiv a_2 + 3k + 2 \pmod{6k + 4} \wedge b_1 \equiv b_2 - k - 1 \pmod{2k + 2}$,

teda existujú čísla $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$ také, že $a_1 = a_2 + 3k + 2 + x(6k+4), b_1 = b_2 - k - 1 + y(2k+2)$. Ak $x > 0$ alebo $x < -1$, tak podľa Dôsledku 3.1.2 máme $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq |a_1 - a_2| \geq 9k + 6 > 4k + 2 = d$. Ak $x = -1$ alebo $x = 0$, tak je $|a_2 - a_1| = 3k + 2$. Ak teraz $y > 1$, je podľa Dôsledku 3.1.1 $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq 2(3k+3) - 1 > d$. Nakoniec ak $y = 1$, máme $|b_1 - b_2| = k + 1$, a teda podľa Vety 3.1 je $\mathrm{dist}(v_1, v_2) = 3k + 2 + k + 1 > d$.

(iv) $\tau(v_1) = 1, \tau(v_2) = 0$:
To znamená, že $a_1 + 3k + 2 \equiv a_2 \pmod{6k+4} \wedge b_1 - k - 1 \equiv b_2 \pmod{2k+2}$, teda existujú čísla $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}_0$ také, že $a_1 = a_2 - 3k - 2 + x(6k+4), b_1 = b_2 + k + 1 + y(2k+2)$. Substitúciou $\overline{x} = x - 1, \overline{y} = y + 1$ sa však tento prípad prevedie na (iii).

Farebné triedy $F_{i,j}$ z Lemy 4.4. teda skutočne poskytujú ofarbenie H, preto $\chi_d \leq \frac{3}{8}\left(d + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}$.

Teraz ukážeme, že toľko farieb je aj potrebných. Uvažujme ľubovoľné ofarbenie H. Pozrime sa na ľubovoľné 3 vrcholy ofarbené rovnakou farbou. Nech sú ich vzájomné vzdialenosti d_1, d_2, d_3 a príslušné najkratšie cesty P_1, P_2, P_3. Hľadajme minimálnu hodnotu $d_1 + d_2 + d_3$. Nutne $d_1 + d_2 + d_3 \geq 3(d+1) = 3d + 3 = 3(4k+2) + 3 = 12k + 9$. Avšak $P_1P_2P_3$ je kružnica (po odstránení spoločných hrán, teda zmenšení počtu hrán o párne číslo), preto jej dĺžka musí byť párne číslo. Preto nemôže nastať prípad, že $d_1 + d_2 + d_3 = 3(d+1)$, teda bez ujmy na všeobecnosti $d_1 \geq d + 1, d_2 \geq d + 1, d_3 \geq d + 2$.

Môžeme si všimnúť, že pre farebné triedy $F_{i,j}$ z Lemy 4.4 platí v posledných vzťahoch rovnosť (pre všetky trojice najbližších vrcholov rovnakej farby), preto na ľubovoľné ofarbenie potrebujeme aspoň toľko farieb, ako sme použili pri $F_{i,j}$. Tým sme dokázali tvrdenie vety pre $d = 4k + 2$.

6.) Nech $d = 4k, k \in \mathbb{N}$. Systém farebných tried z Lemy 4.5 indukuje ofarbenie φ_P, ktoré využíva $6k^2 + 4k + 1 = \frac{3}{8}\left(d + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$ farieb. Máme teda ofarbenie s požadovaným počtom farieb. Potrebujeme ešte ukázať, že vrcholy ofarbené rovnakou farbou sú od seba vzdialené viac ako d. Pre ľubovoľné, ale pevne zvolené i, j z indexovej množiny vezmime rôzne vrcholy $v_1, v_2 \in F_{i,j}$. Nech $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$ a nech bez ujmy na všeobecnosti $b_1 \geq b_2$.

Ak ukážeme, že $|a_1 - a_2| \geq 4k + 1$, tak podľa Dôsledku 3.1.2 je $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq |a_1 - a_2| > d$ a ak ukážeme, že $|b_1 - b_2| \geq 2k + 1$, tak podľa Dôsledku 3.1.1 je $\mathrm{dist}(v_1, v_2) \geq 2|b_1 - b_2| - 1 > d$. Rozoberieme 4 možnosti:

(i) $\tau(v_1) = 0, \tau(v_2) = 0$:

To znamená, že pre nejaké x_1, y_1, x_2, y_2 platí

$$a_1 = i + x_1 - (6k+1)y_1,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 + y_1$$
$$a_2 = i + x_2 - (6k+1)y_2,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 + y_2$$

teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ také, že $a_1 - a_2 = x - (6k+1)y$ a $b_1 - b_2 = (2k+1)x + y$ a nie sú obe rovné 0 (inak by $v_1 = v_2$). Ak $x = 0$ (teda $y \neq 0$), tak je $|a_1 - a_2| \geq 6k+1$. Ak $y = 0$, dostaneme $|b_1 - b_2| \geq 2k+1$. Keďže predpokladáme $b_1 \geq b_2$, nemôžu byť obe čísla x, y záporné. Ak sú obe kladné, tak $|b_1 - b_2| \geq 2k+2$. Ak majú čísla x, y opačné znamienka, tak $|a_1 - a_2| \geq 6k+2$.

(ii) $\tau(v_1) = 1, \tau(v_2) = 1$:
Prípad sa prevedie na (i).

(iii) $\tau(v_1) = 0, \tau(v_2) = 1$:
To znamená, že pre nejaké x_1, y_1, x_2, y_2 platí

$$a_1 = i + x_1 - (6k+1)y_1,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 + y_1$$
$$a_2 = i + x_2 - (6k+1)y_2 + 3k + 1,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 + y_2 + k$$

teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ také, že $a_1 - a_2 = x - (6k+1)y - 3k - 1$ a $b_1 - b_2 = (2k+1)x + y - k$. Keďže predpokladáme $b_1 \geq b_2$, nemôže byť $x \leq 0$ a zároveň $y \leq 0$. Pre $x \leq 0, y > 0$ máme $|a_1 - a_2| \geq 9k+2$. Ak $x > 1$ a $y < -1$, máme $|a_1 - a_2| \geq 9k+3$. Ak $x > 1$ a $y \geq -1$, tak zase $|b_1 - b_2| \geq 3k+1$. Ostal nám len prípad, keď $x = 1$. Pre $y > 0$ alebo $y < -1$ vidíme, že $|a_1 - a_2| \geq 9k+1$. Ak ($x = 1$ a) $y = 0$, máme $|a_1 - a_2| = 3k$ a $|b_1 - b_2| = k+1$; ak $y = -1$, tak $|a_1 - a_2| = 3k+1$ a $|b_1 - b_2| = k$. V oboch posledných prípadoch platí $|a_1 - a_2| \geq |b_1 - b_2|$, teda podľa Vety 3.1 je $\operatorname{dist}(v_1, v_2) = 4k+1 > d$.

(iv) $\tau(v_1) = 1, \tau(v_2) = 0$:
To znamená, že pre nejaké x_1, y_1, x_2, y_2 platí

$$a_1 = i + x_1 - (6k+1)y_1 + 3k + 1,\ b_1 = j + (2k+1)x_1 + y_1 + k$$
$$a_2 = i + x_2 - (6k+1)y_2,\ b_2 = j + (2k+1)x_2 + y_2$$

teda existujú celé čísla $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$ také, že $a_1 - a_2 = x - (6k+1)y + 3k + 1$ a $b_1 - b_2 = (2k+1)x + y + k$. Substitúciou $\overline{x} = x + 1, \overline{y} = y - 1$ však tento prípad môžeme previesť na (iii).

Farebné triedy $F_{i,j}$ z Lemy 4.5 teda skutočne poskytujú ofarbenie H, preto $\chi_d \leq \frac{3}{8}\left(d + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$.

Rovnakým spôsobom ako v časti 5.) sa dá ukázať, že toľko farieb je aj potrebných. Tým sme dokázali tvrdenie celej vety. □

Časť tretia:

L(K)-ofarbovacie číslo

5. Zavedenie $L(K)$-ofarbovacieho čísla

Pripomeňme si najprv definíciu uvedenú vo štvrtej kapitole. Majme graf $G = (V, E)$. Nech $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina farieb. Každú funkciu $\varphi_P : V \longrightarrow P$ nazývame *(vrcholovým) ofarbením* grafu G (alebo tiež n*-ofarbením*). Číslo n je potom *počtom farieb* potrebných pre ofarbenie φ_P.

Nech $K = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných celých čísel. Každé ofarbenie φ_P grafu G spĺňajúce podmienku, že ak sú vrcholy u, v vo vzdialenosti i, tak $|\varphi_P(u) - \varphi_P(v)| \geq k_i$, nazveme $L(K)$*-ofarbenie.* $L(K)$*-ofarbovacie číslo* grafu G definujeme ako minimálny počet farieb potrebných pre $L(K)$-ofarbenie grafu G zmenšený o 1 a označujeme ho $\lambda_G(K)$. To zmenšenie o 1 sme zaviedli kvôli zjednodušeniu vyjadrovania. V niektorých článkoch sa tiež $\lambda_G(K)$ definuje ako rozdiel medzi najväčšou a najmenšou farbou, čo je ekvivalentné našej definícii.

Podobne ako pri optimálnom d-dištančnom ofarbení, aj pre každé optimálne $L(K)$-ofarbenie φ existujú vrcholy u, v také, že $\varphi(u) = 1, \varphi(v) = n$. Potom teda $\lambda_G(K) = n-1$.

Z praktického hľadiska majú zmysel postupnosti, v ktorých je $k_i = 0$ pre všetky $i > i_0$ (kde $i_0 \in \mathbb{N}$) a zároveň $k_{i_0} > 0$. V takomto prípade budeme pre zjednodušenie v ďalšom texte označovať $\lambda_G(K) = \lambda_G(k_1, k_2, \ldots, k_{i_0})$ a $K = \{k_i\}_{i=1}^{i_0}$.

Môžeme si všimnúť, že ak pre nejaké $d \in \mathbb{N}$ položíme $k_1 = k_2 = \cdots = k_d = 1$, tak úlohy *nájdenie d-dištančného chromatického čísla* a *nájdenie $L(K)$-ofarovacieho čísla* majú rovnaké optimálne ofarbenia. Teda d-dištančné chromatické číslo je špeciálnym prípadom $L(K)$-ofarbovacieho čísla a platí $\lambda_G(1, 1, \ldots, 1) = \chi_d(G) - 1$.

Nech $\lfloor x \rfloor$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ označuje *dolnú celú časť* čísla x, t. j. platí $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Označme $\rfloor x \lfloor = x - \lfloor x \rfloor$, pričom zrejme platí $0 \leq \rfloor x \lfloor < 1$. Vyslovíme najprv pomocnú lemu.

Lema 5.1 Nech a, b sú nezáporné celé čísla také, že $a > b$. Nech $m \in \mathbb{N}$. Potom

$$\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{m} \right\rfloor > \frac{a-b}{m} - 1, \text{ a tiež } \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{b}{m} \right\rfloor .$$

DÔKAZ: Keďže platí $0 \leq \rfloor x \lfloor < 1$, je

$$\left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{m} \right\rfloor = \frac{a-b}{m} + \left\rfloor \frac{b}{m} \right\lfloor - \left\rfloor \frac{a}{m} \right\lfloor > \frac{a-b}{m} - 1 \geq -1.$$

Navyše $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor, \lfloor \frac{b}{m} \rfloor$ sú celé čísla, preto musí byť $\lfloor \frac{a}{m} \rfloor - \lfloor \frac{b}{m} \rfloor \geq 0$ $\square$

V tejto kapitole sa budeme ďalej zaoberať $L(K)$-ofarbovaním iba nekonečnej šesťuholníkovej siete H, teda budeme značiť skrátene $\lambda(K) = \lambda_H(K)$. V nasledujúcej vete uvedieme ohraničenie $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ pomocou d-dištančného chromatického čísla, ktorého presné hodnoty už poznáme.

Veta 5.2 Nech $d \in \mathbb{N}$, označme $m = \min\{k_1, k_2, \ldots, k_d\}, M = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_d\}$. Nech χ_d je d-dištančné chromatické číslo grafu H. Potom pre $L(K)$-ofarbovacie číslo platí

$$m \cdot (\chi_d - 1) \leq \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq M \cdot (\chi_d - 1).$$

DÔKAZ: Nech ψ je ľubovoľné d-dištančné ofarbenie grafu H, ktorého počet farieb je rovný χ_d. Definujme ofarbenie $\varphi = M \cdot (\psi - 1) + 1$. Ak vezmeme ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V_H$ také, že ich vzdialenosť je i (kde $1 \leq i \leq d$), tak platí $|\varphi(u) - \varphi(v)| = M \cdot |\psi(u) - \psi(v)| \geq M \geq k_i$. Teda ofarbenie φ je $L(K)$-ofarbenie a využíva $M \cdot (\chi_d - 1) + 1$ farieb. Tým sme dokázali pravú časť nerovnosti.

Ak $m = 0$, zrejme je ľavá časť nerovnosti splnená. Preto ďalej predpokladajme, že $m \geq 1$. Nech ψ je ľubovoľné $L(K)$-ofarbenie grafu H, ktorého počet farieb je rovný $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) + 1$. Definujme ofarbenie $\varphi = \left\lfloor \frac{\psi - 1}{m} \right\rfloor + 1$. Ak vezmeme ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in V_H$ také, že ich vzdialenosť je i (kde $1 \leq i \leq d$), tak platí $\psi(u) \neq \psi(v)$ (lebo $m \geq 1$). Bez ujmy na všeobecnosti nech $\psi(u) > \psi(v)$ (dokonca $\psi(u) - \psi(v) \geq k_i \geq 1$). Potom na základe Lemy 5.1 vieme, že $\varphi(u) \geq \varphi(v)$. Všimnime si teraz, že platí $|\varphi(u) - \varphi(v)| = \varphi(u) - \varphi(v) = \left\lfloor \frac{\psi(u)-1}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\psi(v)-1}{m} \right\rfloor > \frac{\psi(u)-\psi(v)}{m} - 1 \geq \frac{k_i}{m} - 1 \geq 0$ a keďže je tento rozdiel celočíselný, je rovný aspoň 1.

To znamená, že ofarbenie φ je d-dištančné. Ak označíme $\lambda = \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d)$, vieme, že najväčšia farba, akú ψ využíva, je $\lambda + 1$. Preto ak φ využíva n farieb, je nutne $\chi_d \leq n = \left\lfloor \frac{(\lambda+1)-1}{m} \right\rfloor + 1$. Odtiaľ postupne dostávame

$$\chi_d - 1 \leq \left\lfloor \frac{\lambda}{m} \right\rfloor \leq \frac{\lambda}{m}$$
$$m \cdot (\chi_d - 1) \leq \lambda = \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d)$$

Tým sme odvodili aj ľavú časť nerovnosti, teda veta je dokázaná. □

Nasledujúce dve vety uvádzajú ďalšie vlastnosti $L(K)$-ofarbovacieho čísla.

Veta 5.3 Nech $d \in \mathbb{N}$ a nech $k_i \leq k_i^*$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots d$. Potom $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq \lambda(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_d^*)$.

DÔKAZ: Označme $K = \{k_i\}_{i=1}^d$ a označme $K^* = \{k_i^*\}_{i=1}^d$. Ak φ je ľubovoľné optimálne $L(K^*)$-ofarbenie, teda využíva $\lambda(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_d^*) + 1$ farieb, tak je φ aj $L(K)$-ofarbenie. Teda $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq \lambda(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_d^*)$. □

Veta 5.4 Nech $d \in \mathbb{N}$. Potom platí $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d, k_{d+1})$.

Dôkaz: Označme $K_d = \{k_i\}_{i=1}^{d}$ a označme $K_{d+1} = \{k_i\}_{i=1}^{d+1}$, pričom $k_d > 0$, $k_{d+1} > 0$. Ak φ je ľubovoľné optimálne $L(K_{d+1})$-ofarbenie, ktoré nutne využíva $\lambda(K_{d+1}) + 1$ farieb, tak je φ aj $L(K_d)$-ofarbenie. Teda platí $\lambda(K_d) \leq \lambda(K_{d+1})$. $\square$

Pred nasledujúcou vetou zavedieme pre zjednodušenie jedno označenie. Ak $K = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, tak označíme $nK = \{nk_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Veta 5.5 Nech $d \in \mathbb{N}$, a tiež $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\lambda(nk_1, nk_2, \ldots, nk_d) = n\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d).$$

Dôkaz: Označme $K = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, pričom pre každé $i > d$ je $k_i = 0$ a $k_d > 0$. Nech φ je ľubovoľné $L(K)$-ofarbenie, pri ktorom sa dosahuje minimum, teda využíva $\lambda(K)+1$ farieb. Uvažujme ofarbenie $\psi = n(\varphi - 1) + 1$. Vezmime ľubovoľné $u, v \in V_H$, ktorých vzdialenosť je i, kde $1 \leq i \leq d$. Potom je $|\psi(u) - \psi(v)| = n \cdot |\varphi(u) - \varphi(v)| \geq nk_i$, teda ψ je $L(nK)$-ofarbenie a využíva $n\lambda(K) + 1$ farieb. Tým sme dokázali, že ľavá strana nie je väčšia ako pravá.

Nech φ^* je ľubovoľné $L(nK)$-ofarbenie, pri ktorom sa dosahuje minimum, teda využíva $\lambda(nK) + 1$ farieb. Uvažujme ofarbenie $\psi^* = \left\lfloor \frac{1}{n}(\varphi^* - 1) \right\rfloor + 1$. Ukážeme, že ψ^* je $L(K)$-ofarbenie.

Vezmime ľubovoľné $u, v \in V_H$, ktorých vzdialenosť je i, kde $1 \leq i \leq d$. Ak by $\varphi^*(u) = \varphi^*(v)$, tak nutne $nk_i = 0$, odkiaľ vyplýva, že $k_i = 0$ (pretože $n > 0$). Potom $|\psi^*(u) - \psi^*(v)| = 0 \geq k_i$. Ak $\varphi^*(u) \neq \varphi^*(v)$, bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladajme $\varphi^*(u) > \varphi^*(v)$. Z Lemy 5.1 vieme, že $\psi^*(u) \geq \psi^*(v)$. Ak $k_i = 0$, tak využitím Lemy 5.1 ľahko ukážeme, že $|\psi^*(u) - \psi^*(v)| \geq 0 = k_i$.

Nech teda $\varphi^*(u) > \varphi^*(v)$ a $k_i \geq 1$. Potom je $|\psi^*(u) - \psi^*(v)| = \psi^*(u) - \psi^*(v) = \left\lfloor \frac{1}{n}(\varphi^*(u) - 1) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{n}(\varphi^*(v) - 1) \right\rfloor > \frac{\varphi^*(u) - \varphi^*(v)}{n} - 1 \geq \frac{nk_i}{n} - 1 = k_i - 1$ a keďže ide o rozdiel dvoch celých čísel, je rovný aspoň k_i. Čiže ψ^* je $L(K)$-ofarbenie a využíva $\left\lfloor \frac{1}{n}\lambda(nK) \right\rfloor + 1$ farieb. Teda $\lambda(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{n}\lambda(nK) \right\rfloor$. Z tohto výrazu po úprave dostávame, že $\lambda(nK) \geq n\lambda(K)$, čím sme dokázali, že ani pravá strana nie je väčšia ako ľavá. $\square$

6. Nutné a postačujúce podmienky pre vzdialenosti 1 a 2

V tejto kapitole sa, rovnako ako v predchádzajúcej, budeme ďalej zaoberať $L(K)$-ofarbovaním iba nekonečnej šesťuholníkovej siete H, teda budeme označovať skrátene $\lambda(K) = \lambda_H(K)$. Zrejme nemá zmysel uvažovať $L(K)$-ofarbovacie číslo, ak sú všetky členy postupnosti K nulové. Ako na najjednoduchší prípad sa pozrime na $\lambda(k_1)$.

Veta 6.1 Platí, že $\lambda(k_1) = k_1$.

DÔKAZ: Máme teda podmienku iba na susedné vrcholy, ktorých farby sa musia líšiť aspoň o k_1. Keďže H je bipartitný graf, dajú sa jeho vrcholy rozložiť do dvoch množín H_1 a H_2 tak, aby ľubovoľné dva vrcholy z H_1 neboli susedné a zároveň aby ani ľubovoľné dva vrcholy z H_2 neboli susedné.

Niektorý z vrcholov musí byť ofarbený farbou 1. Ľubovoľný jeho sused potom nutne musí mať farbu $k_1 + 1$ alebo vyššiu. Teda $\lambda(k_1) \geq k_1$. Ak priradíme $\varphi(u) = 1$ pre všetky $u \in H_1$ a $\varphi(v) = k_1 + 1$ pre všetky $v \in H_2$, tak dostaneme $L(k_1)$-ofarbenie, preto $\lambda(k_1) \leq k_1$.

Z toho už dostávame, že $\lambda(k_1) = k_1$. □

Veľa snahy sa venovalo zisteniu $L(2,1)$-označovacieho čísla pre všeobecné grafy kvôli jeho aplikácii ([1], [7], [12]). V článku [7] autori ukázali, že pre kladné reálne číslo d platí $\lambda(2d, d) = d\lambda(2, 1)$. Autori však pri ofarbovaní dovolili priradenie neceločíselnej farby, čo my neumožňujeme. Preto sa tu ich dôkaz nedá aplikovať. Napriek tomu však naše skúsenosti naznačujú, že uvedený vzťah platí aj v našej situácii.

Veta 6.2 Pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo platí

$$k_1 + 2k_2 \leq \lambda(k_1, k_2) \leq 3 \max\{k_1, k_2\}.$$

DÔKAZ: Vieme, že aby ofarbenie φ bolo optimálne, musí existovať vrchol $u \in V_H$ taký, že $\varphi(u) = 1$. Označme jeho susedov v_1, v_2, v_3, pričom nech bez ujmy na všeobecnosti platí $\varphi(v_1) \leq \varphi(v_2) \leq \varphi(v_3)$. Keďže každý z vrcholov v_1, v_2, v_3 je vo vzdialenosti 1 od u, musí byť farba každého z nich aspoň $k_1 + 1$, teda $\varphi(v_1) \geq k_1 + 1$. Zároveň, keďže v_1, v_2, v_3 sú navzájom vo vzdialenosti 2, musí platiť $\varphi(v_2) - \varphi(v_1) \geq k_2$ a tiež $\varphi(v_3) - \varphi(v_2) \geq k_2$. Ak tieto tri nerovnosti sčítame, dostaneme, že $\varphi(v_3) \geq k_1 + 2k_2 + 1$. Tým sme dokázali ľavú časť nerovnosti.

Z Vety 4.6 vieme, že 2-dištančné chromatické číslo $\chi_2 = 4$, a tak podľa Vety 5.2 máme $\lambda(k_1, k_2) \leq 3 \max\{k_1, k_2\}$. □

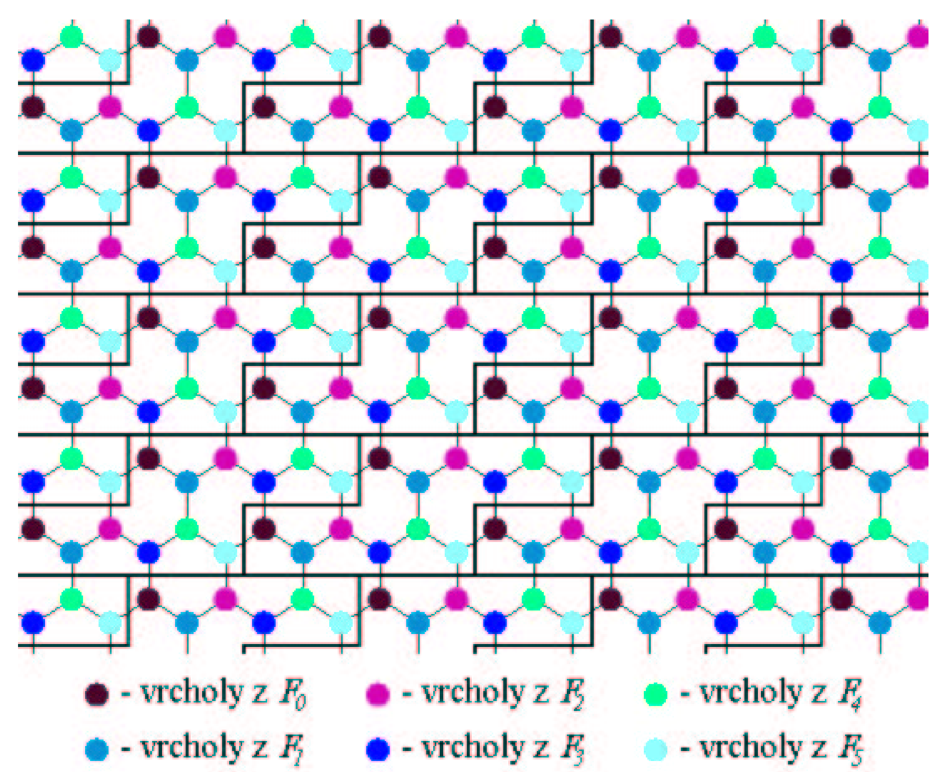
Na to, aby sme mohli dokázať postačujúce podmienky pre $\lambda(k_1, k_2)$ pre niektoré dvojice čísel k_1, k_2, sú potrebné nasledovné tri lemy.

Lema 6.3 Platí $\lambda(1,2) \leq 5$.

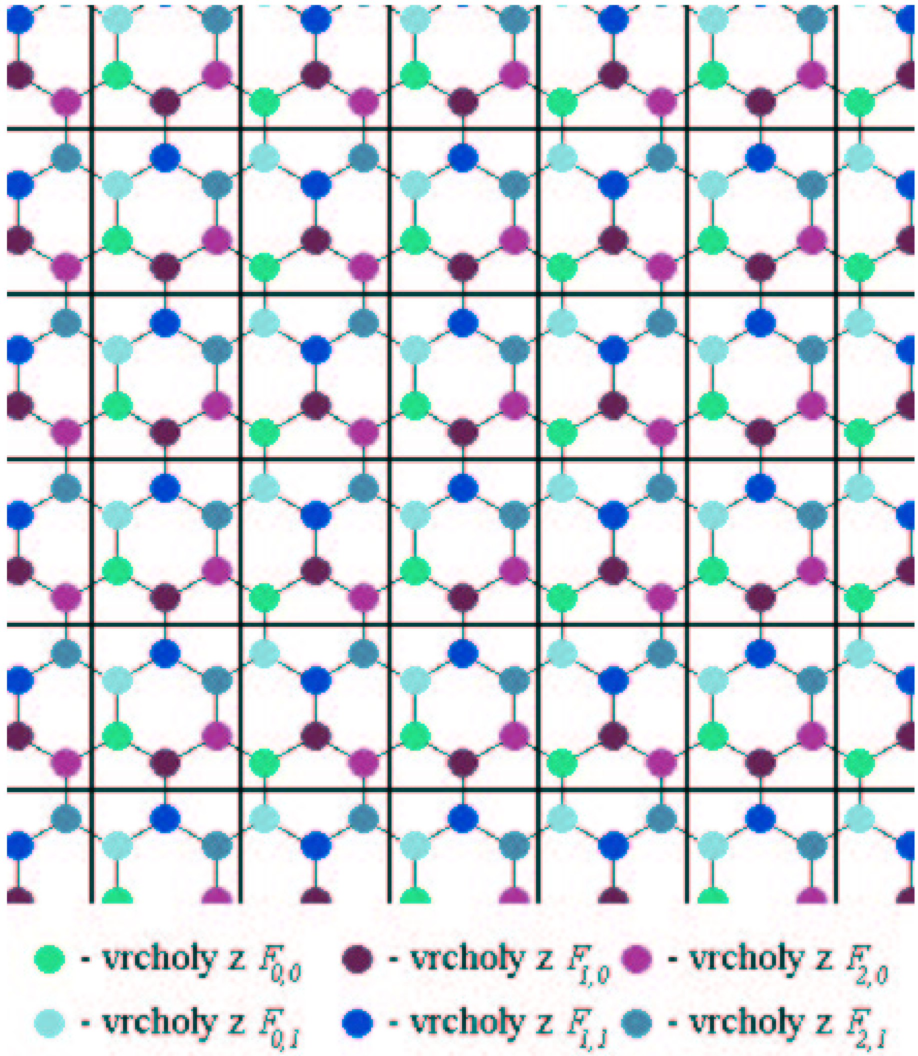
DÔKAZ: Označme

$$F_i = \{(a,b) \vee (a+3, b+1); a \equiv i \pmod 6, b \equiv 0 \pmod 2\}$$

pre $i = 0, 1, \ldots, 5$. Vezmime ľubovoľný vrchol $(x,y) \in V_H$. Ak y je párne, označme ako i zvyšok čísla x po delení číslom 6. Ak y je nepárne, nech i je zvyšok čísla $x-3$ po delení číslom 6. Takto každému vrcholu jednoznačne priradíme množinu F_i, do ktorej patrí, a preto systém týchto množín tvorí rozklad množiny V_H. Ak ψ je funkcia definovaná $\psi(i) = i+1$, máme dokázané, že ide o sytém farebných tried. Nie je ťažké nahliadnuť, že tento systém indukuje $L(1,2)$-ofarbenie, pretože susedné vrcholy nie sú ofarbené rovnakou farbou a farby vrcholov vo vzdialenosti 2 sa líšia o 2 alebo o 4 (pozri obr. 7). Na ofarbenie grafu využíva 6 farieb, teda platí $\lambda(1,2) \leq 5$. □



Obrázok 7. Farebné triedy F_i pre $L(1,2)$-ofarbenie grafu H.



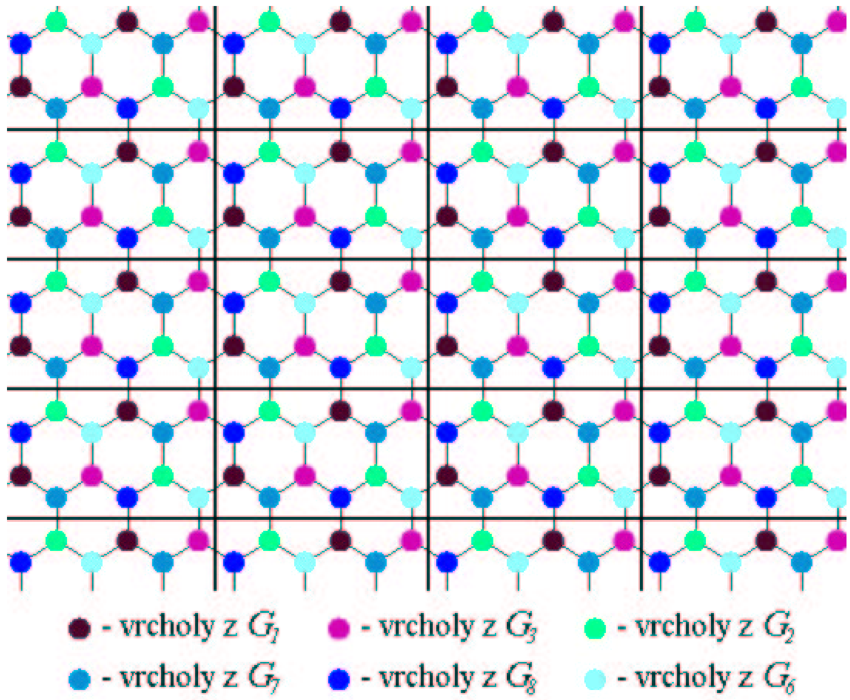
Obrázok 8. Farebné triedy $F_{i,j}$ pre $L(2,1)$-ofarbenie grafu H.

Lema 6.4 Platí $\lambda(2,1) \leq 5$.

DÔKAZ: Označme

$$F_{i,j} = \{(a,b); a \equiv i \pmod 3, b \equiv j \pmod 2\}$$

pre $i = 0,1,2, j = 0,1$. Vezmime ľubovoľný vrchol $(x,y) \in V_H$. Nech i je zvyšok čísla x po delení číslom 3 a j je zvyšok čísla y po delení číslom 2. Takto každému vrcholu jednoznačne priradíme množinu $F_{i,j}$, do ktorej patrí, a preto systém týchto množín tvorí rozklad množiny V_H. Nech ψ je funkcia definovaná nasledovne: $\psi(0,0) = 2, \psi(0,1) = 5, \psi(1,0) = 4, \psi(1,1) = 1, \psi(2,0) = 6, \psi(2,1) = 3$. Tým máme dokázané, že ide o sytém farebných tried. Tento systém indukuje $L(2,1)$-ofarbenie, pretože farby susedných vrcholov sa líšia aspoň o 2 a vrcholy vo vzdialenosti 2 sú vždy ofarbené rôznymi farbami (pozri obr. 8). Na ofarbenie grafu využívame 6 farieb, teda platí $\lambda(2,1) \leq 5$. $\square$



Obrázok 9. Farebné triedy G_i pre $L(3,1)$-ofarbenie grafu H.

Lema 6.5 Platí $\lambda(3,1) \leq 7$ a navyše existuje $L(3,1)$-ofarbenie využívajúce len farby $1, 2, 3, 6, 7, 8$.

DÔKAZ: Označme

$$F_{i,j} = \{(a,b); a \equiv i \pmod 6, b \equiv j \pmod 2\}$$

pre $i = 0, 1, \ldots, 5$, $j = 0, 1$. Vezmime ľubovoľný vrchol $(x,y) \in V_H$. Nech i je zvyšok čísla x po delení číslom 6 a j je zvyšok čísla y po delení číslom 2. Takto každému vrcholu jednoznačne priradíme množinu $F_{i,j}$, do ktorej patrí, a preto systém týchto množín tvorí rozklad množiny V_H. Označme teraz

$$\begin{aligned} G_1 &= F_{0,0} \cup F_{3,1}, & G_5 &= \emptyset, \\ G_2 &= F_{4,0} \cup F_{1,1}, & G_6 &= F_{5,0} \cup F_{2,1}, \\ G_3 &= F_{2,0} \cup F_{5,1}, & G_7 &= F_{1,0} \cup F_{4,1}, \\ G_4 &= \emptyset, & G_8 &= F_{3,0} \cup F_{0,1}. \end{aligned}$$

Zrejme aj tento systém množín pre $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ tvorí rozklad množiny V_H. Keď položíme $\psi(i) = i$, máme dokázané, že ide o sytém farebných tried. Množiny G_i sú vytvorené tak, aby susedné vrcholy mali farby odlišné o aspoň 3 a ľahko vidieť, že rovnako ofarbené vrcholy sú aspoň vo vzdialenosti 3. Tento systém tak indukuje $L(3,1)$-ofarbenie (pozri obr. 9). Na ofarbenie grafu využívame 8 farieb, teda platí $\lambda(3,1) \leq 7$, a navyše farby číslo 4 a 5 nie sú využité. □

Veta 6.6 Ak $2k_1 \leq k_2$, tak je $\lambda(k_1, k_2) = k_1 + 2k_2$.

DÔKAZ: Nutná podmienka pre $\lambda(k_1, k_2)$ vyplýva priamo z Vety 6.2. Pre dokázanie postačujúcej podmienky uvažujme optimálne $L(1,2)$-ofarbenie ψ_P. Na základe Lemy 6.3 vieme, že využíva nanajvýš 6 farieb. Ukážeme teraz, že ak nahradíme farby $1, 2, 3, 4, 5, 6$ po rade farbami $1, k_1+1, k_2+1, k_1+k_2+1, 2k_2+1, k_1+2k_2+1$ (označme toto zobrazenie φ), dostaneme $L(k_1, k_2)$-ofarbenie. Zobrazenie φ má nasledovnú vlastnosť:

$$(\forall u, v \in V_H)\psi_P(u) > \psi_P(v) \implies \varphi(\psi_P(u)) \geq \varphi(\psi_P(v)) \qquad (*)$$

Ľubovoľné dva susedné vrcholy boli pôvodne ofarbené rôznymi farbami. Všimnime si, že pre $i = 1, 3, 5$ je $\varphi(i+1) - \varphi(i) = k_1$ a pre $i = 2, 4$ platí $\varphi(i+1) - \varphi(i) = k_2 - k_1 \geq k_1$ (lebo predpokladáme $k_2 \geq 2k_1$). Ak vezmeme do úvahy, že zobrazenie φ má vlastnosť (*), tak platí $\varphi(j) - \varphi(i) \geq k_1$ pre $j \geq i+1$, čiže môžeme konštatovať, že podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 1 je splnená.

Farby ľubovoľných dvoch vrcholov vo vzdialenosti 2 sa pôvodne od seba líšili aspoň o 2. Hneď vidíme, že $\varphi(i+2) - \varphi(i) = k_2$ (pre $i = 1, 2, 3, 4$) a keďže φ má vlastnosť (*), platí $\varphi(j) - \varphi(i) \geq k_2$ pre $j \geq i+2$, čím je splnená aj podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 2. □

Veta 6.7 Ak $2k_2 \leq k_1 \leq 3k_2$, tak je $\lambda(k_1, k_2) = 2k_1 + k_2$.

DÔKAZ: Najprv dokážeme nutnú podmienku. Vieme, že v optimálnom $L(k_1, k_2)$-ofarbení φ musí existovať vrchol v_1 ofarbený farbou 1. Nech u_1, u_2, u_3 sú jeho susedia, pričom nech platí $\varphi(u_1) \leq \varphi(u_2) \leq \varphi(u_3)$ (zrejme navyše $\varphi(u_1) \geq k_1+1$). Označme ešte v_1, v_2, v_3 susedov vrchola u_1, pričom nech platí $\varphi(v_1) \leq \varphi(v_2) \leq \varphi(v_3)$.

Ak $\varphi(u_1) \geq k_1 + 2k_2 + 1$, tak potom máme vrchol u_3 ofarbený farbou aspoň $\varphi(u_1) + 2k_2 \geq k_1 + 4k_2 + 1 \geq 2k_1 + k_2 + 1$.

V prípade, že $k_1 + 2k_2 + 1 > \varphi(u_1) \geq k_1 + k_2 + 1$, musí byť aspoň jeden z jeho susedov ofarbený farbou väčšou ako je $\varphi(u_1)$. Podmienky totiž určujú, že $\varphi(v_2) - \varphi(v_1) \geq k_2$ a $\varphi(v_3) - \varphi(v_2) \geq k_2$, teda $\varphi(v_3) \geq 2k_2+1$. Ak by bolo $\varphi(v_3) \leq$

$\varphi(u_1)$, tak by ešte muselo platiť $\varphi(u_1) - \varphi(v_3) \geq k_1$. Sčítaním posledných dvoch nerovností dostávame $\varphi(u_1) \geq k_1 + 2k_2 + 1$, čo je však spor. Musí preto platiť, že $\varphi(v_3) \geq \varphi(u_1)$, a keďže sú tieto dva vrcholy susedné, dokonca aj $\varphi(v_3) - \varphi(u_1) \geq k_1$. Ak k tomu pripočítame, že $\varphi(u_1) \geq k_1 + k_2 + 1$, dostávame $\varphi(v_3) \geq 2k_1 + k_2 + 1$.

V prípade, že $k_1 + k_2 + 1 > \varphi(u_1) \geq k_1 + 1$, musia byť dvaja jeho susedia ofarbení farbou väčšou ako je $\varphi(u_1)$ (tretí má farbu 1). Podmienky totiž určujú, že $\varphi(v_2) - \varphi(v_1) \geq k_2$, teda $\varphi(v_2) \geq k_2 + 1$. Ak by bolo $\varphi(v_2) \leq \varphi(u_1)$, tak by ešte muselo platiť $\varphi(u_1) - \varphi(v_2) \geq k_1$. Sčítaním týchto dvoch nerovností dostávame $\varphi(u_1) \geq k_1 + k_2 + 1$, čo je však spor. Musí preto platiť, že $\varphi(v_3) \geq \varphi(v_2) \geq \varphi(u_1)$, a keďže je u_1 susedom vrchola v_2, v_3, tak aj $\varphi(v_2) - \varphi(u_1) \geq k_1$. Vrcholy v_2, v_3 sú vo vzdialenosti 2, takže tiež musí byť $\varphi(v_3) - \varphi(v_2) \geq k_2$. Ak k tomu pripočítame, že $\varphi(u_1) \geq k_1 + 1$, dostávame $\varphi(v_3) \geq 2k_1 + k_2 + 1$.

V každom prípade sme teda našli v ofarbení φ vrchol ofarbený farbou aspoň $2k_1 + k_2 + 1$. Ofarbenie φ bolo optimálne, preto $\lambda(k_1, k_2) \geq 2k_1 + k_2$.

Pre dokázanie postačujúcej podmienky uvažujme optimálne $L(2,1)$-ofarbenie ψ_P. Na základe Lemy 6.4 vieme, že využíva nanajvýš 6 farieb. Ukážeme teraz, že ak nahradíme farby $1, 2, 3, 4, 5, 6$ po rade farbami $1, k_2 + 1, k_1 + 1, k_1 + k_2 + 1, 2k_1 + 1, 2k_1 + k_2 + 1$ (označme toto zobrazenie φ), dostaneme $L(k_1, k_2)$-ofarbenie. Podobne ako v dôkaze predchádzajúcej vety, aj tu má zobrazenie φ vlastnosť (*).

Farby ľubovoľných dvoch susedných vrcholov sa pôvodne od seba líšili aspoň o 2. Všimnime si, že pre $i = 1, 2, 3, 4$ je $\varphi(i + 2) - \varphi(i) = k_1$. Ak vezmeme do úvahy, že zobrazenie φ má vlastnosť (*), tak môžeme konštatovať, že podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 1 je splnená.

Farby ľubovoľných dvoch vrcholov vo vzdialenosti 2 sa pôvodne od seba líšili aspoň o 1. Hneď vidíme, že pre $i = 1, 3, 5$ je $\varphi(i + 1) - \varphi(i) = k_2$ a pre $i = 2, 4$ platí $\varphi(i+1) - \varphi(i) = k_1 - k_2 \geq k_2$ (lebo predpokladáme $k_1 \geq 2k_2$). A keďže φ má vlastnosť (*), je $\varphi(j) - \varphi(i) \geq k_2$ pre $j \geq i + 1$, a tým je splnená aj podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 2. □

Veta 6.8 Ak $3k_2 \leq k_1$, tak je $\lambda(k_1, k_2) = k_1 + 4k_2$.

DÔKAZ: Nutnú podmienku dokážeme podobne ako v predchádzajúcej vete. Nech sú vrcholy $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ označené ako v dôkaze predchádzajúcej vety.

Ak $\varphi(u_1) \geq k_1 + 2k_2 + 1$, tak potom máme vrchol u_3 ofarbený farbou aspoň $\varphi(u_1) + 2k_2 = k_1 + 4k_2 + 1$.

V prípade, že $k_1 + 2k_2 + 1 > \varphi(u_1) \geq k_1 + 1$, využijeme z dôkazu predchádzajúcej vety, že musí platiť $\varphi(v_3) \geq 2k_1 + k_2 + 1$. V našom prípade, kedy $k_1 \geq 3k_2$, to znamená, že $\varphi(v_3) \geq k_1 + 4k_2 + 1$. Teda $\lambda(k_1, k_2) \geq k_1 + 4k_2$.

Pre dokázanie postačujúcej podmienky uvažujme $L(3,1)$-ofarbenie ψ_P z Lemy 6.5, o ktorom vieme, že využíva len farby $1,2,3,6,7,8$. Ukážeme teraz, že ak nahradíme tieto farby po rade farbami $1, k_2+1, 2k_2+1, k_1+2k_2+1, k_1+3k_2+1, k_1+4k_2+1$ (označme toto zobrazenie φ), dostaneme $L(k_1,k_2)$-ofarbenie. Toto zobrazenie má opäť vlastnosť (*).

Farby ľubovoľných dvoch susedných vrcholov sa pôvodne od seba líšili aspoň o 3, preto po aplikovaní zobrazenia φ sa ich farby líšia aspoň o k_1. Farby ľubovoľných dvoch vrcholov vo vzdialenosti 2 sa pôvodne od seba líšili aspoň o 1. Hneď vidíme, že vtedy pri zobrazení φ je rozdiel ich farieb aspoň k_2. Tým je splnená aj podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 2. Našli sme teda $L(k_1,k_2)$-ofarbenie, ktoré využíva k_1+4k_2+1 farieb. Preto platí $\lambda(k_1,k_2) \leq k_1+4k_2$.

Týmto sme dokázali tvrdenie vety. □

Veta 6.9 Platí $\lambda(k,k) = 3k$.

DÔKAZ: Vieme, že v každom optimálnom ofarbení musí existovať vrchol ofarbený farbou 1. Nech farby jeho susedov sú a,b,c, pričom $a \leq b \leq c$. Nutne musia platiť nasledovné nerovnosti: $a \geq k+1, b-a \geq k, c-b \geq k$. Ich sčítaním dostávame $c \geq 3k+1$. Teda $\lambda(k,k) \geq 3k$.

Ohraničenie z druhej strany vyplýva priamo z Vety 6.2. □

Naše skúsenosti naznačujú, že by pre $\frac{k_2}{2} < k_1 < 2k_2$ malo platiť $\lambda(k_1,k_2) = 3\max\{k_1,k_2\}$. Nutnú podmienku pre tento vzťah dostávame z Vety 6.2. Ukazuje sa, že na dokázanie postačujúcej podmienky je však potrebný podgraf grafu H s počtom vrcholov závislým na k_1.

Zhrnutie: Pre $L(k_1,k_2)$-ofarbovacie číslo platí

$$\lambda(k_1,k_2) = \begin{cases} k_1+2k_2, & \text{ak } k_1 \leq \frac{k_2}{2} \\ 3k_1, & \text{ak } k_1 = k_2 \\ 2k_1+k_2, & \text{ak } 2k_2 \leq k_1 \leq 3k_2 \\ k_1+4k_2, & \text{ak } 3k_2 \leq k_1 \end{cases}$$

Navyše platí $k_1+2k_2 \leq \lambda(k_1,k_2) \leq 3\max\{k_1,k_2\}$, ak $\frac{k_2}{2} < k_1 < 2k_2$.

7. Ohraničenia pre $\lambda(k_1, k_2)$ pre všeobecné grafy

Dôkazy viet, ktoré sme uviedli v piatej kapitole, je možné použiť nielen na graf H, ale aj na ľubovoľný iný súvislý graf $G = (V, E)$. Uvedieme tu najprv ich príslušne upravené znenia aj s dôsledkami, ktoré sa týkajú $L(k_1, k_2)$-ofarbovacieho čísla $\lambda_G(k_1, k_2)$, ktoré budeme v tejto kapitole označovať jednoducho λ. Georges a Mauro sa vo viacerých článkoch (napr. [5], [6]) zaoberali týmto zovšeobecnením $L(2,1)$-ofarbovacieho čísla.

Veta 7.1 Nech $d \in \mathbb{N}$. Označme $m = \min\{k_1, k_2, \ldots, k_d\}, M = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_d\}$. Nech χ_d je d-dištančné chromatické číslo daného grafu $G = (V, E)$. Potom pre $L(K)$-ofarbovacie číslo $\lambda(K)$ platí

$$m \cdot (\chi_d - 1) \leq \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq M \cdot (\chi_d - 1).$$

Dôsledok 7.1.1 Označme $m = \min\{k_1, k_2\}, M = \max\{k_1, k_2\}$. Nech χ_2 je 2-dištančné chromatické číslo daného grafu $G = (V, E)$. Potom pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ platí

$$m \cdot (\chi_2 - 1) \leq \lambda \leq M \cdot (\chi_2 - 1).$$

Dôsledok 7.1.2 Nech χ_2 je 2-dištančné chromatické číslo daného grafu $G = (V, E)$. Potom platí

$$\lambda(k, k) = k(\chi_2 - 1).$$

Veta 7.2 Nech $d \in \mathbb{N}$ a $k_i \leq k_i^*$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots d$. Potom $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq \lambda(k_1^*, k_2^*, \ldots, k_d^*)$.

Dôsledok 7.2.1 Ak $k_1 \leq k_1^*, k_2 \leq k_2^*$, potom platí $\lambda(k_1, k_2) \leq \lambda(k_1^*, k_2^*)$.

Dôsledok 7.2.2 Označme $M = \max\{k_1, k_2\}$. Potom pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ grafu $G = (V, E)$ platí

$$\lambda \leq M \cdot \lambda(2, 1).$$

DÔKAZ: Z Dôsledku 7.1.1 máme $\lambda \leq M \cdot (\chi_2 - 1)$. Tiež vieme, že 2-dištančné chromatické číslo je špeciálnym prípadom $L(k_1, k_2)$-ofarbovacieho čísla, pričom $\chi_2 - 1 = \lambda(1, 1)$. Dôsledok 7.2.1 nám dáva vzťah $\lambda(1, 1) \leq \lambda(2, 1)$. Tým už dostávame samotné tvrdenie. □

Veta 7.3 Nech $d \in \mathbb{N}$. Potom platí $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d) \leq \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d, k_{d+1})$.

Pripomeňme si, že ak $K = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, tak potom označíme $nK = \{nk_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Veta 7.4 Nech $d \in \mathbb{N}$, a tiež $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\lambda(nk_1, nk_2, \ldots, nk_d) = n\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_d).$$

Dôsledok 7.4.1 Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\lambda(nk_1, nk_2) = n\lambda(k_1, k_2).$$

V nasledujúcich vetách uvedieme dolné ohraničenia pre λ ako funkcie minimálneho a maximálneho stupňa grafu. Nech číslo δ označuje minimálny stupeň grafu G a Δ označuje maximálny stupeň grafu G.

Veta 7.5 Ak $\Delta \geq 1$, tak pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ grafu $G = (V, E)$ platí

$$\lambda \geq \max\{k_1; k_1 + (\delta - 1)k_2\}.$$

Dôkaz: Vieme, že ak $L(k_1, k_2)$-ofarbenie φ je optimálne, existuje vrchol $u \in V$ taký, že $\varphi(u) = 1$. Dokonca taký vrchol existuje v množine $V \setminus I$, kde I je množina všetkých izolovaných vrcholov grafu G. Množina $V \setminus I$ je neprázdna, keďže $\Delta \geq 1$. Vrchol u nie je izolovaný, takže má aspoň jedného suseda.

Označme $v_1, v_2, \ldots, v_n$ susedov vrchola u, pričom bez ujmy na všeobecnosti nech platí $\varphi(v_1) \leq \varphi(v_2) \leq \cdots \leq \varphi(v_n)$. Keďže každý z týchto vrcholov je vo vzdialenosti 1 od u, musí byť farba každého z nich aspoň $k_1 + 1$, teda $\varphi(v_1) \geq k_1 + 1$. Zároveň, keďže $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú navzájom vo vzdialenosti 2, musí platiť $\varphi(v_{i+1}) - \varphi(v_i) \geq k_2$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Ak všetky tieto nerovnosti sčítame, dostaneme, že $\varphi(v_n) \geq k_1 + (n - 1)k_2 + 1$. Teda v optimálnom $L(k_1, k_2)$-ofarbení existuje vrchol ofarbený farbou $k_1 + (n - 1)k_2 + 1$. Vieme, že $n \geq 1$ a zároveň $n \geq \delta$, teda pre $\delta = 0$ využívame farbu s číslom aspoň $k_1 + 1$ a pre $\delta \geq 1$ využívame farbu s číslom aspoň $k_1 + (\delta - 1)k_2 + 1$.

Tým máme nerovnosť dokázanú. □

Dôsledok 7.5.1 Ak $\delta \geq 1$, tak pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ grafu $G = (V, E)$ platí

$$\lambda \geq k_1 + (\delta - 1)k_2.$$

V článku [12] autori uvádzajú bez dôkazu nasledovnú vetu (Lemma 2.1).

Veta 7.6 Nech G je graf s maximálnym stupňom $\Delta \geq 2$. Potom platia nasledujúce tvrdenia:

(i) $\lambda(2,1) \geq \Delta + 1$.

(ii) ak $\lambda(2,1) = \Delta + 1$, tak každý vrchol stupňa Δ je ofarbený farbou 1 alebo $\Delta + 2$ vo všetkých optimálnych $L(2,1)$-ofarbeniach.

(iii) ak G má tri vrcholy stupňa Δ také, že jeden z nich je susedný so zvyšnými dvoma, tak $\lambda(2,1) \geq \Delta + 2$.

Nasledujúce dve vety poskytujú zovšeobecnenie tohto tvrdenia. Prvá zovšeobecňuje bod (i), druhá bod (ii).

Veta 7.7 Ak $\Delta \geq 2$, tak pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ grafu G platí

$$\lambda \geq \begin{cases} k_1 + (\Delta - 1)k_2, & \text{ak } k_2 \leq k_1 \\ 2k_1 + (\Delta - 2)k_2, & \text{ak } k_1 \leq k_2 \leq 2k_1 \\ (\Delta - 1)k_2, & \text{ak } 2k_1 \leq k_2 \end{cases}$$

DÔKAZ: Nech φ je ľubovoľné optimálne $L(k_1, k_2)$-ofarbenie, teda využívajúce $\lambda + 1$ farieb. Nech u je ľubovoľný vrchol stupňa Δ, ofarbený farbou $\varphi(u)$. Označme jeho susedov $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ tak, aby bolo $\varphi(v_1) \geq \varphi(v_2) \geq \cdots \geq \varphi(v_\Delta)$. Rozoberieme tri možnosti:

1.) ak $\varphi(u) \geq \varphi(v_1)$: Zrejme $\varphi(v_\Delta) \geq 1$. Aby medzi farbami susedných vrcholov bol rozdiel aspoň k_1, musí byť $\varphi(u) - \varphi(v_1) \geq k_1$. Podobne, keďže vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sú navzájom vo vzdialenosti 2, musí platiť $\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1}) \geq k_2$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Po sčítaní týchto nerovností dostávame, že $\varphi(u) \geq k_1 + (\Delta - 1)k_2 + 1$, čiže v tomto prípade by bolo $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ aspoň $k_1 + (\Delta - 1)k_2$.

2.) ak $\varphi(u) \leq \varphi(v_\Delta)$: Zrejme $\varphi(u) \geq 1$. Aby medzi farbami susedných vrcholov bol rozdiel aspoň k_1, musí byť $\varphi(v_\Delta) - \varphi(u) \geq k_1$. Podobne, keďže vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sú navzájom vo vzdialenosti 2, musí platiť $\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1}) \geq k_2$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Po sčítaní týchto nerovností dostávame, že $\varphi(u) \geq k_1 + (\Delta - 1)k_2 + 1$, čiže v tomto prípade by bolo $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo λ aspoň $k_1 + (\Delta - 1)k_2$.

3.) ak $\varphi(v_1) \geq \varphi(u) \geq \varphi(v_\Delta)$: Potom musí existovať $j \in \mathbb{N}$ také, že $\varphi(v_j) \geq \varphi(u) \geq \varphi(v_{j+1})$. Zrejme $\varphi(u_\Delta) \geq 1$. Keďže vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sú navzájom vo vzdialenosti 2, musí platiť $\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1}) \geq k_2$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$. Ak sčítame všetky tieto nerovnosti, dostávame $\varphi(v_1) \geq (\Delta - 1)k_2 + 1$. Aby medzi farbami susedných vrcholov bol rozdiel aspoň k_1, musí byť $\varphi(v_j) - \varphi(u) \geq k_1$ a

$\varphi(u) - \varphi(v_{j+1}) \geq k_1$. Ak zo všetkých uvedených nerovností vynecháme $\varphi(v_j) - \varphi(v_{j+1}) \geq k_2$ a sčítame ich, dostaneme, že $\varphi(v_1) \geq (\Delta-2)k_2 + 2k_1 + 1$. V tomto prípade teda $L(k_1,k_2)$-ofarbovacie číslo λ je aspoň $\max\{(\Delta-1)k_2; 2k_1 + (\Delta-2)k_2\} = (\Delta-2)k_2 + \max\{k_2; 2k_1\}$.

Optimálne $L(k_1,k_2)$-ofarbenie obsahuje aspoň jednu z uvedených možností, preto platí $\lambda \geq \min\{k_1 + (\Delta-1)k_2; (\Delta-2)k_2 + \max\{k_2; 2k_1\}\}$. Vzájomným porovnaním k_1, k_2 a $2k_1$ získame tvrdenie vety. □

Veta 7.8 Ak $k_1 > k_2$ a $\lambda(k_1,k_2) = k_1 + (\Delta-1)k_2$, tak každý vrchol stupňa Δ je ofarbený farbou 1 alebo farbou $k_1 + (\Delta-1)k_2 + 1$ vo všetkých optimálnych $L(k_1,k_2)$-ofarbeniach.

DÔKAZ: Z predpokladu $k_1 > k_2$ vyplýva, že $\max\{k_2; 2k_1\} = 2k_1$, a potom $(\Delta-2)k_2 + \max\{k_2; 2k_1\} > k_1 + (\Delta-1)k_2$. Keďže $\lambda(k_1,k_2) = k_1 + (\Delta-1)k_2$, tak nemôže v žiadnom optimálnom $L(k_1,k_2)$-ofarbení nastať prípad 3.) z dôkazu predchádzajúcej vety. Pri rovnakom označení potom navyše musia nastať rovnosti vo vzťahoch $\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+1}) = k_2$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, \Delta-1$. Taktiež musí platiť vo vzťahu $\varphi(u) - \varphi(v_1) = k_1$ a $\varphi(v_\Delta) = 1$, resp. $\varphi(v_\Delta) - \varphi(u) = k_1$ a $\varphi(u) = 1$. Potom $\varphi(u) = k_1 + (\Delta-1)k_2 + 1$, resp. $\varphi(u) = 1$. □

V článku [7] bola uvedená nasledujúca veta.

Veta 7.9 Nech G je graf s maximálnym stupňom Δ. Potom $\lambda(2,1) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.

Využitím analogickej myšlienky v dôkaze dostávame horné ohraničenie aj pre $L(k_1,k_2)$-ofarbovacie číslo.

Veta 7.10 $\lambda(k_1,k_2) \leq (2k_2-1)\Delta^2 + 2(k_1-k_2)\Delta$.

DÔKAZ: Zoraďme vrcholy grafu G ľubovoľne a ofarbme ich podľa poradia tak, že vrcholu pridelíme najmenšiu farbu, ktorou môže byť ofarbený. Každý vrchol $v \in V$ je susedný najviac s Δ vrcholmi a existuje nanajvýš $\Delta(\Delta-1)$ vrcholov vzdialených od v vo vzdialenosti 2. Takže keď chceme ofarbiť vrchol v, musíme sa vyhnúť nanajvýš $\Delta(2k_1-1) + \Delta(\Delta-1)(2k_2-1)$ farbám. Vrchol v je potom ofarbený nejakou farbou, a preto na optimálne ofarbenie vrcholov grafu nepotrebujeme farbu s číslom väčším ako $\Delta(2k_1-1) + \Delta(\Delta-1)(2k_2-1) + 1$. Teda $\lambda \leq \Delta(2k_1-1) + \Delta(\Delta-1)(2k_2-1) = (2k_2-1)\Delta^2 + 2(k_1-k_2)\Delta$. □

V článku [1] autori zlepšili horný odhad $L(2,1)$-ofarbovacieho čísla na $\Delta^2 + \Delta$. Zovšeobecnením myšlienky v ich dôkaze dostávame horné ohraničenie aj pre $L(k_1,k_2)$-ofarbovacie číslo, ktoré je vo všeobecnosti lepšie ako ohraničenie uvedené vo Vete 7.10.

Pred uvedením samotného tvrdenia ešte zavedieme dve definície. Nech $\lceil x \rceil$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ označuje *hornú celú časť* čísla x, t. j. platí $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ a $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Nech k je ľubovoľné pevné prírodzené číslo. *k-nezávislá množina* grafu $G = (V, E)$ je taká podmnožina S množiny V, že každé dva rôzne vrcholy z množiny S sú vo vzdialenosti väčšej ako k. Poznamenajme, že 1-nezávislá množina je klasická nezávislá množina. k-nezávislú množinu S grafu G nazveme *maximálnou*, ak S nie je vlastnou podmnožinou žiadnej inej k-nezávislej množiny grafu G.

Veta 7.11 Ak $k_1 > k_2$, tak $\lambda(k_1, k_2) < k_2\Delta^2 + k_1\Delta$. Navyše, ak $\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Z}$, tak $\lambda(k_1, k_2) \leq k_2\Delta^2 + (k_1 - k_2)\Delta$.

DÔKAZ: Označme najprv $n = \left\lceil \frac{k_1}{k_2} \right\rceil$, zrejme $n \geq 2$. Vrcholy grafu $G = (V, E)$ budeme ofarbovať postupne farbami $1, k_2+1, 2k_2+1, \ldots, kk_2+1$, kde k je nejaké prirodzené číslo, pre ktoré platí $k \leq \Delta^2 + (n-1)\Delta$ (ako uvidíme neskôr).

Položme formálne $S_{-1} = S_{-2} = \cdots = S_{-(n-1)} = \emptyset$ a $i = 0$. Kým nebudú ofarbené všetky vrcholy grafu G, opakujeme nasledovný postup:

Označíme $V_i = \{x \in V; x \text{ je neofarbený} \wedge \operatorname{dist}(x, y) \geq 2 \text{ pre každé } y \in S_{i-1} \cup S_{i-2} \cup \cdots \cup S_{i-(n-1)}\}$. Vyberieme maximálnu 2-nezávislú množinu S_i grafu $G_i = (V_i, E_i)$, ktorý je maximálnym podgrafom grafu G. Ak ešte nie sú ofarbené všetky vrcholy grafu G, zväčšíme i o 1 a postup opakujeme.

Položíme $k = i$ po skončení uvedeného postupu, t.j. množina V_k je neprázdna a množiny V_j pre $j > k$ sú prázdne. Množiny V_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ tvoria zrejme rozklad vrcholovej množiny grafu G. Ofarbíme teraz všetky vrcholy tak, že vrcholu $v \in V_i$ priradíme farbu $i \cdot k_2 + 1$. Ukážeme, že toto ofarbenie φ je $L(k_1, k_2)$-ofarbením, a že dáva horný odhad pre λ uvedený v tejto vete.

Na začiatok poznamenajme, že ak sú dva vrcholy $u, v \in V$ ofarbené rovnakou farbou, tak oba patria do množiny S_i pre nejaké i, ktorá je 2-nezávislá, a teda ich vzdialenosť je aspoň 3. Vďaka spôsobu ofarbovania je (absolútny) rozdiel farieb ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré sú ofarbené rôznymi farbami, prirodzeným násobkom k_2 (nech je to j), a potom tieto vrcholy patria množinám S_i, S_{i-j}.

Uvažujme ďalej nejaké dva vrcholy $u, v \in V$ ofarbené farbami, ktorých (absolútny) rozdiel je aspoň k_2 a menej ako k_1 (bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $\varphi(u) > \varphi(v)$). Potom rozdiel ich farieb môže byť nanajvýš $(n-1)k_2$, pretože $nk_2 \geq k_1$. Ak $\varphi(u) = ik_2 + 1$ (teda $u \in S_i$), tak $(i-1)k_2 + 1 \geq \varphi(v) \geq (i-(n-1))k_2 + 1$, čiže $v \in S_{i-1} \cup S_{i-2} \cup \cdots \cup S_{i-(n-1)}$. Z definície V_i ale potom vyplýva, že vzdialenosť týchto vrcholov je aspoň 2, ako je potrebné na splnenie podmienky pre vzdialenosť 2.

Ak vezmeme ľubovoľnú inú dvojicu rôznych vrcholov, ktorých (absolútny) rozdiel farieb je aspoň k_1, tak pre splnenie podmienok majú byť vo vzdialenosti aspoň 1 (lebo $k_1 > k_2$), čo bezpochyby sú. Tým máme dokázané, že φ je $L(k_1, k_2)$-ofarbením.

Nech $x \in V$ je teraz ľubovoľný vrchol ofarbený farbou $kk_2 + 1$. Označme

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i; 0 \leq i \leq k-1 \wedge \operatorname{dist}(x,y) = 1 \text{ pre nejaké } y \in S_i\}, \\ I_2 &= \{i; 0 \leq i \leq k-1 \wedge \operatorname{dist}(x,y) \leq 2 \text{ pre nejaké } y \in S_i\}, \\ I_3 &= \{i; 0 \leq i \leq k-1 \wedge \operatorname{dist}(x,y) \geq 3 \text{ pre každé } y \in S_i\}. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že $|I_2| + |I_3| = k$. Keďže počet vrcholov y, pre ktoré je $1 \leq \operatorname{dist}(x,y) \leq 2$ je nanajvýš $\deg(x) + \sum_{y \in V \wedge xy \in E} (\deg(y) - 1) \leq \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$, máme $|I_2| \leq \Delta^2$. Podobne, máme najviac ak $\deg(x) \leq \Delta$ vrcholov susedných s x, teda $|I_1| \leq \Delta$.

Pre každé $i \in I_3$ je $x \notin V_i$, pretože inak by $S_i \cup \{x\}$ bola 2-nezávislá množina grafu G_i, čo je v spore s výberom S_i. To potom znamená, že $\operatorname{dist}(x,y) = 1$ pre nejaký vrchol $y \in S_{i-1} \cup S_{i-2} \cup \cdots \cup S_{i-(n-1)}$, čiže aspoň jedno z čísel $i-1, i-2, \ldots, i-(n-1)$ patrí do I_1. Teda $\left\lceil \frac{|I_3|}{n-1} \right\rceil \leq |I_1|$. Z vlastností hornej celej časti vyplýva, že potom $\frac{|I_3|}{n-1} \leq |I_1|$, teda $|I_3| \leq (n-1)|I_1|$.

Pre najväčšiu použitú farbu v tomto ofarbení potom platí

$$\begin{aligned} kk_2 + 1 = (|I_2| + |I_3|)k_2 + 1 \leq (|I_2| + (n-1)|I_1|)k_2 + 1 \leq \\ \leq (\Delta^2 + (n-1)\Delta)k_2 + 1 = k_2\Delta^2 + \left\lceil \frac{k_1}{k_2} - 1 \right\rceil k_2\Delta + 1. \end{aligned}$$

Vo všeobecnosti je $\left\lceil \frac{k_1}{k_2} - 1 \right\rceil < \frac{k_1}{k_2}$, preto $kk_2 + 1 < k_2\Delta^2 + k_1\Delta + 1$.

Navyše, ak $\frac{k_1}{k_2}$ je celé číslo, tak $\left\lceil \frac{k_1}{k_2} - 1 \right\rceil = \frac{k_1}{k_2} - 1$, teda $kk_2 + 1 \leq k_2\Delta^2 + (k_1 - k_2)\Delta + 1$. □

Veta 7.12 Ak $k_1 \leq k_2$, tak $\lambda(k_1, k_2) \leq k_2\Delta^2 + k_2\Delta$.

DÔKAZ: Vrcholy grafu $G = (V, E)$ budeme ofarbovať postupne farbami $1, k_2 + 1, 2k_2 + 1, \ldots, kk_2 + 1$, kde k je nejaké prirodzené číslo, pre ktoré platí $k \leq \Delta^2 + \Delta$ (ako uvidíme neskôr).

Položme formálne $S_{-1} = \emptyset$ a $i = 0$. Kým nebudú ofarbené všetky vrcholy grafu G, opakujeme postup z dôkazu predchádzajúcej vety s tým rozdielom, že označíme $V_i = \{x \in V; x \text{ je neofarbený} \wedge \operatorname{dist}(x,y) \geq 2 \text{ pre každé } y \in S_{i-1}\}$. Vrcholy ofarbíme rovnakým spôsobom ako v dôkaze predchádzajúcej vety (k je tiež rovnako definované). Ukážeme, že toto ofarbenie φ je $L(k_1, k_2)$-ofarbením, a že dáva horný odhad pre λ uvedený v tejto vete.

Aj v tomto prípade, ak sú dva vrcholy $u, v \in V$ ofarbené rovnakou farbou, tak oba patria do množiny S_i pre nejaké i, ktorá je 2-nezávislá, a teda ich vzdialenosť je aspoň 3. Vďaka spôsobu ofarbovania je (absolútny) rozdiel farieb ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré sú ofarbené rôznymi farbami, prirodzeným násobkom k_2 (nech je to j), a potom tieto vrcholy patria množinám S_i, S_{i-j}.

Uvažujme ďalej nejaké dva vrcholy $u, v \in V$ ofarbené farbami, ktorých (absolútny) rozdiel je aspoň k_2 (tým pádom je tento rozdiel aj aspoň k_1). Pre splnenie podmienok pre ofarbovanie majú byť vo vzdialenosti aspoň 1, čo bezpochyby sú. Tým máme dokázané, že φ je $L(k_1, k_2)$-ofarbením.

Nech $x \in V$ je teraz ľubovoľný vrchol ofarbený farbou $kk_2 + 1$. Označme I_1, I_2, I_3 ak v dôkaze predchádzajúcej vety. Je zrejmé, že platí $|I_2| + |I_3| = k$, $|I_2| \leq \Delta^2$, $|I_1| \leq \Delta$.

Pre každé $i \in I_3$ je $x \notin V_i$, pretože inak by $S_i \cup \{x\}$ bola 2-nezávislá množina grafu G_i, čo je v spore s výberom S_i. To potom znamená, že $\mathrm{dist}(x, y) = 1$ pre nejaký vrchol $y \in S_{i-1}$, čiže $i - 1 \in I_1$. Teda $|I_3| \leq |I_1|$.

Pre najväčšiu použitú farbu v tomto ofarbení potom platí

$$\begin{aligned} kk_2 + 1 = (|I_2| + |I_3|)k_2 + 1 \leq (|I_2| + |I_1|)k_2 + 1 \leq \\ \leq (\Delta^2 + \Delta)k_2 + 1 = k_2\Delta^2 + k_2\Delta + 1. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali tvrdenie vety. $\square$

Ďalej uvedieme dve horné ohraničenia pre $L(k_1, k_2)$-ofarbovacie číslo $\lambda(k_1, k_2)$ ľubovoľného grafu číslom $\lambda(1, 2)$, resp. $\lambda(2, 1)$.

Veta 7.13 Nech platí $2k_1 \leq k_2$. Ak pre graf $G = (V, E)$ je $\lambda(1, 2) = n$, tak potom

$$\lambda(k_1, k_2) \leq 2 \left\rfloor \frac{n}{2} \right\lfloor k_1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k_2.$$

Dôkaz: Nech ψ je optimálne $L(1, 2)$-ofarbenie, o ktorom vieme, že využíva $n + 1$ farieb. Ukážeme teraz, že zobrazenie $\varphi(\psi)$ je $L(k_1, k_2)$-ofarbenie, pričom $\varphi(\psi) = 2 \left\rfloor \frac{\psi - 1}{2} \right\lfloor k_1 + \left\lfloor \frac{\psi - 1}{2} \right\rfloor k_2 + 1$.

Nech v je ľubovoľný vrchol a $\psi(v)$ jeho farba. Pozrime sa, akou farbou je tento vrchol ofarbený ofarbením $\varphi(\psi)$. Ak $\psi(v)$ je nepárne, tak $\varphi(\psi(v)) = \frac{\psi(v)-1}{2}k_2 + 1$. Ak $\psi(v)$ je párne, tak $\varphi(\psi(v)) = k_1 + \frac{\psi(v)-2}{2}k_2 + 1$. Nech teraz ψ_1, ψ_2 sú dve po sebe idúce celé čísla, pričom $1 \leq \psi_1 < \psi_2 \leq n$. Ak ψ_2 je nepárne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2-1}{2}k_2 - \left(k_1 + \frac{\psi_1-2}{2}k_2\right) = \frac{\psi_1}{2}k_2 - \left(k_1 + \frac{\psi_1-2}{2}k_2\right) = k_2 - k_1 \geq k_1$. Ak ψ_2 je párne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = k_1 + \frac{\psi_2-2}{2}k_2 - \frac{\psi_1-1}{2}k_2 = k_1$. Keďže $k_1 \geq 0$, potom zobrazenie φ má nasledovnú vlastnosť:

$$(\forall u, v \in V)\psi(u) > \psi(v) \implies \varphi(\psi(u)) \geq \varphi(\psi(v)) \qquad (*)$$

Nech teraz ψ_1, ψ_2 sú celé čísla, pričom $1 \leq \psi_1 < \psi_1 + 2 = \psi_2 \leq n$. Ak ψ_2 je nepárne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2-1}{2}k_2 - \frac{\psi_1-1}{2}k_2 = \frac{\psi_1+1}{2}k_2 - \frac{\psi_1-1}{2}k_2 = k_2$. Ak ψ_2 je párne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2-2}{2}k_2 - \frac{\psi_1-2}{2}k_2 = \frac{\psi_1}{2}k_2 - \frac{\psi_1-2}{2}k_2 = k_2$.

Ľubovoľné dva susedné vrcholy boli pôvodne (ofarbením ψ) ofarbené rôznymi farbami. Pred chvíľou sme ukázali, že vrcholy, ktorých farby sa pri ofarbení ψ líšia práve o 1, sú ofarbením $\varphi(\psi)$ ofarbené takým spôsobom, že sa ich farby líšia aspoň o k_1. Keďže φ má vlastnosť (*), platí to aj v prípade, že sa farby dvoch susedných vrcholov pri ofarbení ψ líšia o viac ako 1. Tak môžeme konštatovať, že podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 1 je splnená.

Farby ľubovoľných dvoch vrcholov vo vzdialenosti 2 sa pri ofarbení ψ líšili od seba aspoň o 2. Pri ofarbení $\varphi(\psi)$ sa teda (využitím vlastnosti (*)) líšia aspoň o k_2. Tým je splnená aj podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 2.

Teda sme ukázali, že zobrazenie $\varphi(\psi)$ je skutočne $L(k_1, k_2)$-ofarbením a využíva $2\left\rfloor \frac{(n+1)-1}{2} \right\lfloor k_1 + \left\lfloor \frac{(n+1)-1}{2} \right\rfloor k_2 + 1$ farieb. Preto $\lambda(k_1, k_2) \leq 2\left\rfloor \frac{n}{2} \right\lfloor k_1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k_2$. □

Veta 7.14 Nech platí $2k_2 \leq k_1$. Ak pre graf G je $\lambda(2,1) = n$, tak potom

$$\lambda(k_1, k_2) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k_1 + 2\left\rfloor \frac{n}{2} \right\lfloor k_2.$$

DÔKAZ: Nech ψ je optimálne $L(2,1)$-ofarbenie, o ktorom vieme, že využíva $n+1$ farieb. Ukážeme teraz, že zobrazenie $\varphi(\psi)$ je $L(k_1, k_2)$-ofarbenie, pričom $\varphi(\psi) = \left\lfloor \frac{\psi-1}{2} \right\rfloor k_1 + 2\left\rfloor \frac{\psi-1}{2} \right\lfloor k_2 + 1$.

Nech v je ľubovoľný vrchol a $\psi(v)$ jeho farba. Pozrime sa, akou farbou je tento vrchol ofarbený ofarbením $\varphi(\psi)$. Ak $\psi(v)$ je nepárne, tak $\varphi(\psi(v)) = \frac{\psi(v)-1}{2}k_1 + 1$. Ak $\psi(v)$ je párne, tak $\varphi(v) = \frac{\psi(v)-2}{2}k_1 + k_2 + 1$. Nech teraz ψ_1, ψ_2 sú dve po sebe idúce celé čísla, pričom $1 \leq \psi_1 < \psi_2 \leq n$. Ak ψ_2 je nepárne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2-1}{2}k_1 - \left(\frac{\psi_1-2}{2}k_1 + k_2\right) = \frac{\psi_1}{2}k_1 - \left(\frac{\psi_1-2}{2}k_1 + k_2\right) = k_1 - k_2 \geq k_2$. Ak ψ_2 je párne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2-2}{2}k_1 + k_2 - \frac{\psi_1-1}{2}k_1 = k_2$. Zobrazenie φ má teda opäť vlastnosť (*).

Nech teraz ψ_1, ψ_2 sú celé čísla, pričom $1 \leq \psi_1 < \psi_1 + 2 = \psi_2 \leq n$. Ak ψ_2 je nepárne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2 - 1}{2} k_1 - \frac{\psi_1 - 1}{2} k_1 = \frac{\psi_1 + 1}{2} k_1 - \frac{\psi_1 - 1}{2} k_1 = k_1$. Ak ψ_2 je párne, tak $\varphi(\psi_2) - \varphi(\psi_1) = \frac{\psi_2 - 2}{2} k_1 - \frac{\psi_1 - 2}{2} k_1 = \frac{\psi_1}{2} k_1 - \frac{\psi_1 - 2}{2} k_1 = k_1$.

Farby ľubovoľných dvoch susedných vrcholov sa pri ofarbení ψ líšili od seba aspoň o 2. Pred chvíľou sme ukázali, že vrcholy, ktorých farby sa pri ofarbení ψ líšia o 2, sú ofarbením $\varphi(\psi)$ ofarbené takým spôsobom, že sa ich farby líšia aspoň o k_1. Keďže φ má vlastnosť (*), platí to aj v prípade, že sa farby dvoch susedných vrcholov pri ofarbení ψ líšia o viac ako 2. Tak môžeme konštatovať, že podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 1 je splnená.

Farby ľubovoľných dvoch vrcholov vo vzdialenosti 2 sa pri ofarbení ψ líšili od seba aspoň o 1. Pri ofarbení $\varphi(\psi)$ sa teda líšia aspoň o k_2. Tým je splnená aj podmienka pre vrcholy vo vzdialenosti 2.

Tým sme ukázali, že zobrazenie $\varphi(\psi)$ je skutočne $L(k_1, k_2)$-ofarbením a využíva $\left\lfloor \frac{(n+1)-1}{2} \right\rfloor k_1 + 2 \left\rfloor \frac{(n+1)-1}{2} \right\lfloor k_2 + 1$ farieb. Preto $\lambda(k_1, k_2) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor k_1 + 2 \rfloor \frac{n}{2} \lfloor k_2$. $\square$

Záver

V tejto diplomovej práci je uvedených niekoľko tvrdení, týkajúcich sa vrcholových farbení nekonečnej šesťuholníkovej siete, ktoré sú inšpirované praxou. Z tohto pohľadu sú zaujímavé ešte ďalšie úlohy — priraďovanie dvoch resp. troch farieb (vysielacích frekvencií) každému vrcholu (vysielaču), keďže sa v súčasnosti využívajú dvojfrekvenčné či trojfrekvenčné základňové stanice alebo cyklické ofarbovanie (pozri [9]).

Podobne ako vrcholové farbenie, aj ofarbovanie hrán a ofarbovanie stien, či dokonca súčasné ofarbovanie vrcholov, hrán a/alebo stien sú určite zaujímavými problémami, ktorými by sa dalo pokračovať.

Siedma kapitola však obsahuje všeobecné tvrdenia o $L(K)$-ofarbovaní grafov, ktoré by sa mohli zaradiť medzi články súvisiace s touto problematikou, pretože prinášajú nové poznatky.

Literatúra

[1] Gerard J. Chang, David Kuo: *The L(2, 1)-labeling Problem on Graphs*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, Vol. 9, No. 2, May 1996, pp. 309-316.

[2] M. B. Cozzens, F. S. Roberts: *T-colorings of Graphs and the Channel Assignment Problem*, Congr. Numer., 35, 1982, pp. 191-208.

[3] R. C. French: *The Effects of Fading and Shadowing on Channel Reuse in Mobile Radio*, IEEE Transactions on Vehicular Technology 28, August 1979.

[4] A. Gamst: *Homogeneous Distribution of Frequencies in a Regular Hexagonal Cell System*, IEEE Transactions on Vehicular Technology VT-31, 1982, pp. 132-144.

[5] J. P. Georges, D. M. Mauro: *Generalized Vertex Labelings with a Condition at Distance Two*, Congr. Numer., 109, 1995, pp. 141-159.

[6] J. P. Georges, D. M. Mauro: *Labeling Products of Complete Graphs with a Condition at Distance Two*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, Vol. 14, No. 1, 2000, pp. 28-35.

[7] Jerrold R. Griggs, Roger K. Yeh: *Labelling Graphs with a Condition at Distance 2*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, Vol. 5, No. 4, November 1992, pp. 586-595.

[8] W. K. Hale: *Frequency Assignment: Theory and Applications*, Proc. IEEE 68, 1980, pp. 1497-1514.

[9] J. van den Heuvel, R. A. Leese, M. A. Shepherd: *Graph Labeling and Radio Channel Assignment*, Journal of Graph Theory, Volume 29, Number 4, December 1998, pp. 263-283.

[10] V. H. MacDonald: *The Cellular Concept*, Bell System Technical Journal 58, No. 1, January 1979, pp. 15-41.

[11] Colin McDiarmid, Bruce Reed: *Colouring Proximity Graphs in the Plane*, Discrete Mathematics 199, 1999, pp. 123-137.

[12] Marshall A. Whittlesey, John P. Georges, David W. Mauro: *On the λ-number of Q_n and Related Graphs*, SIAM Journal of Discrete Mathematics, Vol. 8, No. 4, November 1995, pp. 499-506.

[13] W. R. Young: *Advanced Mobile Phone Service: Introduction, Background, and Objectives*, Bell System Technical Journal 58, No. 1, January 1979, pp. 1-14.